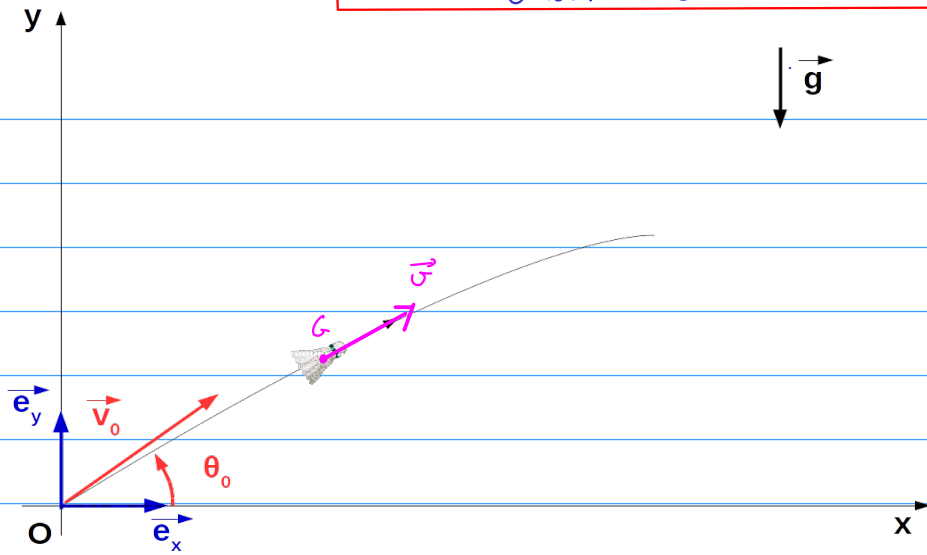


12 - Trajectoire d'un volant de badminton



Hyp: trajectoire plane

Syst: volant

Ref: \mathcal{R} , terrestre, galiléen

IDF: - poids $\vec{P} = m\vec{g} = mg \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$
 - force de frottement \vec{f}

Théorème de la résultante cinétique appliqué au volant dans \mathcal{R} :

$$m \vec{a}(t) = \vec{P} + \vec{f} \quad \text{avec} \quad \vec{a}(t) = \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} \quad \text{c.I.} \quad \mathcal{G} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_0 \begin{pmatrix} v_0 \cos \theta_0 \\ v_0 \sin \theta_0 \end{pmatrix}$$

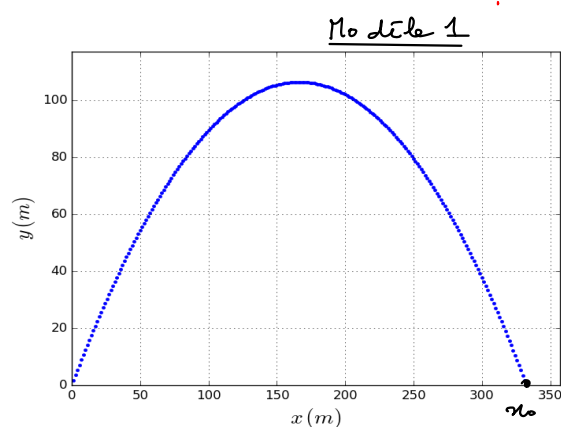
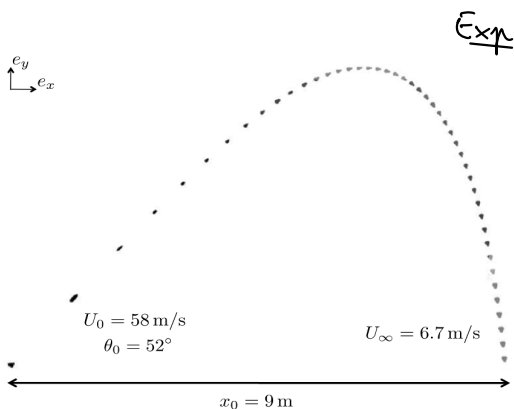
Modèle 1: $\vec{f} = \vec{0}$ (cas du cours)

Equations différentielles:
$$\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = -g \end{cases}$$

Trajectoire parabolique et portée $x_0 = \frac{v_0^2}{g}$.

D'après le doc. 2: $\|\vec{v}_0\| = v_0 = 58 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$
 $\theta_0 = 52^\circ$ } $\Rightarrow x_0 \approx 9 \text{ m}$.

Le modèle 1 donne: $x_0 = \frac{v_0^2}{g} \sin^2 \theta_0 = 135 \text{ m}$ **Aberrant!**



Modèle 2: $\vec{f} = -\mu \vec{v}$, $\mu > 0$. Force de frottement linéaire avec la vitesse.

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{f} = -\mu \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix}$$

D'où le système d'équations différentielles:
$$\begin{cases} m\ddot{x} = -\mu\dot{x} \\ m\ddot{y} = -\mu\dot{y} - mg \end{cases}$$

Soit sous forme canonique:
$$\begin{cases} \ddot{x} + \frac{\mu}{m}\dot{x} = 0 \\ \ddot{y} + \frac{\mu}{m}\dot{y} = -g \end{cases}$$

On pose $\tau = \frac{m}{\mu}$

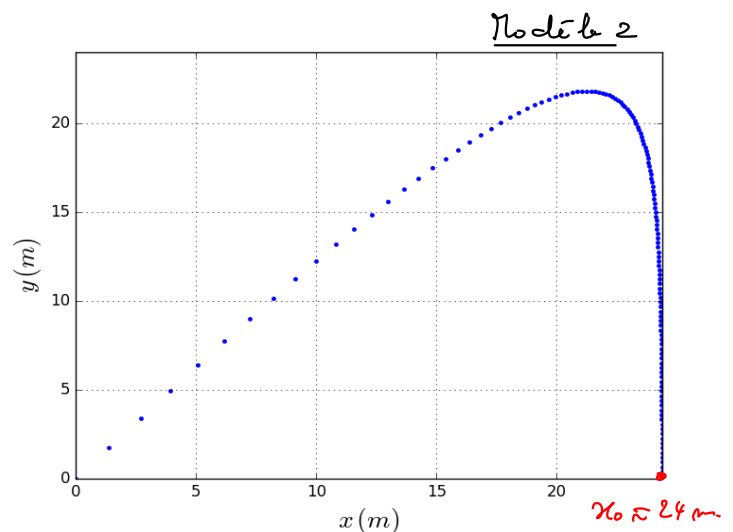
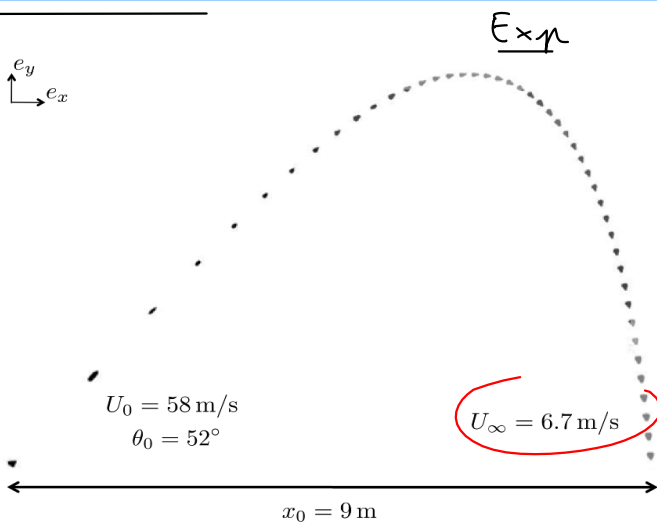
$$\Rightarrow \begin{cases} \ddot{x} + \frac{\dot{x}}{\tau} = 0 \\ \ddot{y} + \frac{\dot{y}}{\tau} = -g \end{cases}$$

Équa diff linéaires d'ordre 1 (déjà rencontrées en cinétique et électrocinétique)

Au bout de $gg\tau$: $\begin{cases} \dot{x} \rightarrow 0 \\ \dot{y}/\tau \rightarrow -g \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_{lim} = -g\tau \vec{e}_y$

$$\Rightarrow v_{lim} = g\tau = \frac{mg}{\mu}$$

Simulation



Évaluons μ . Si le modèle 2 est correct alors: $v_{lim} = v_\infty$

$$\Leftrightarrow \frac{mg}{\mu} = v_\infty \Leftrightarrow \mu = \frac{mg}{v_\infty}$$

A.N.: $m = 5,3 \times 10^{-3} \text{ kg}$

$v_\infty = 6,7 \text{ m.s}^{-1}$

$\Rightarrow \mu = 7,76 \times 10^{-3} \text{ N.m}^{-1} \cdot \text{s}$

L'allure de la trajectoire est bien meilleure que pour le modèle 1. La portée $x_0 = 24 \text{ m}$ n'est pas abondante mais très surestimé par rapport à l'expérience.

Modèle 3: $\vec{f} = -\gamma \sigma \vec{v}$, $\gamma > 0$. Force de frottement quadratique.

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} \Rightarrow \sigma = \|\vec{v}\| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \text{ et } \vec{f} = -\gamma \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix}$$

D'où le système d'équations différentielles:
$$\begin{cases} m\dot{x} = -\gamma \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \dot{x} \\ m\dot{y} = -\gamma \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \dot{y} - mg \end{cases}$$

Soit:
$$\begin{cases} \dot{x} = -\gamma/m \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \dot{x} & (1) \\ \dot{y} = -\gamma/m \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \dot{y} - g & (2) \end{cases}$$

Equations différentielles non linéaires complées \Rightarrow résolution numérique.

d'après (1)

Vitesse limite U_∞ ? $\forall t \dot{x} > 0 \Rightarrow \dot{x} < 0 \Rightarrow \dot{x} \searrow \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} \rightarrow 0 \\ \dot{y} \rightarrow 0 \end{cases}$

De même $\dot{y} \rightarrow 0$ au cours du temps.

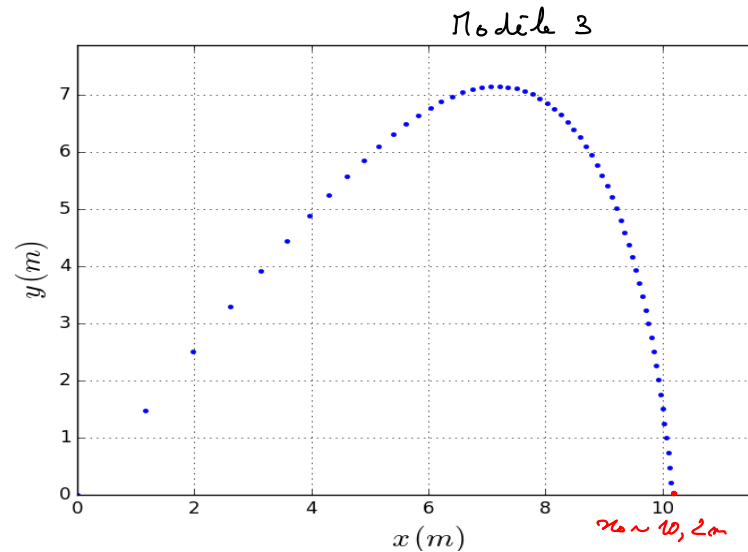
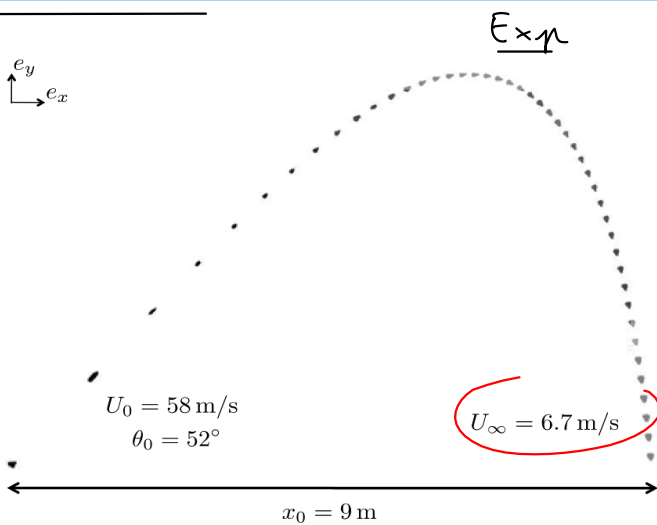
D'où: $\sigma = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \rightarrow \sqrt{\dot{y}^2} = |\dot{y}| = \sigma_{lim}$

et (2) donne après le régime transitoire: $0 = -\gamma/m \sigma_{lim} \dot{y} - g$
 et $\dot{y} = -\sigma_{lim} \vec{e}_y$

D'où $\gamma/m \sigma_{lim}^2 - g = 0 \Rightarrow \sigma_{lim} = \sqrt{\frac{mg}{\gamma}}$

déterminable par pure analyse dimensionnelle

Simulation



Évaluons γ . Si le modèle 3

est correct alors: $\sigma_{lim} = U_\infty$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{mg}{\gamma}} = U_\infty \Leftrightarrow \gamma = \frac{mg}{U_\infty^2}$$

A.N.: $m = 5,3 \times 10^{-3} \text{ kg}$

$U_\infty = 6,7 \text{ m.s}^{-1}$

$$\Rightarrow \gamma = 1,16 \times 10^{-3} \text{ N.m}^{-2} \cdot \text{s}^{-2}$$

Allure très proche de données expérimentales (à superposer pour comparer plus finement).

Portée $x_0 = 10, 2 \text{ m} \rightarrow 9 \text{ m}$.

L'écart vient-il du modèle?

Neuve en saut elle donne $U_\infty = 6,2 \text{ m.s}^{-1}$

\rightarrow pour cette valeur $\Rightarrow x_0 \approx 8,9 \text{ m}$.

Modèle 3 bien adapté!