



# CONCOURS BLANC – PHYSIQUE-CHIMIE – CORRIGÉ

D.Malka – MPSI 2018-2019 – Lycée Jeanne d’Albret

09.05.2019

## Problème 1 – Élimination du bruit dans une chaîne de mesure d’un signal

Dans ce problème, on aborde divers manières de filtrer le bruit d’un signal.

### 1. Ondulation parasite du signal d’un capteur.

On considère le filtre RC représenté fig.1. On se place en régime sinusoïdal.

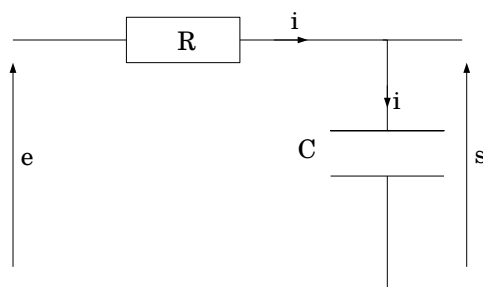


FIGURE 1 – Filtre RC

1.1 Impédance du condensateur :  $Z = \frac{1}{C\omega}$ . A haute fréquence l’impédance du condensateur tend vers 0 donc il se comporte comme un fil idéal. Il en résulte que  $s = 0$  A basse fréquence, l’impédance du condensateur tend vers  $\infty$  donc il se comporte comme un interrupteur ouvert. Il en résulte que  $i = 0$  et donc  $s = e$ . Ce filtre RC a donc le comportement d’un passe-bas.

1.2 Pont diviseur de tension :

$$s = \frac{Z_C}{Z_R + Z_C} e$$

$$\Leftrightarrow \underline{H} = \frac{1}{R + \frac{1}{jC\omega}}$$

$$\Leftrightarrow \underline{H} = \frac{1}{1 + jRC\omega}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\underline{H} = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}}} \quad \text{avec} \quad \boxed{\omega_c = \frac{1}{RC}}$$

1.3 Ce filtre est d’ordre 1.

1.4 Vérifions que le filtre réalise effectivement un filtrage passe-bas.

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} |H| = 1$$

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} |H| = 0$$



1.5 Signal d’entrée :  $u(t) = E + b(t)$  avec  $b(t) = A \cos(2\pi ft)$ . La sortie s’écrit  $s(t) = S + b_s(t) = S + A_s \cos(2\pi ft + \varphi)$  avec :

$$1.5.1 \quad S = H(\omega = 0)E = E$$

$$1.5.2 \quad A_s = H(\omega = 2\pi f)A = \frac{A}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{f_c}\right)^2}} \approx 0,2A$$

$$1.5.3 \quad \varphi = \arg(\underline{H}(f)) = -\arctan(f/f_c) = -1,34 \text{ rad}$$

Finalement, le signal de sortie vaut :  $s(t) = 5 + 0.2A \cos(2\pi ft - 1.34)$

## 2. Filtrage du bruit d’un amplificateur

### 2.1 Chaîne de mesure classique

Le signal à mesurer est continu donc de fréquence nul. En cela le filtrage passe-bas est adapté. Cependant, le bruit est maximal à basse fréquence donc le filtrage passe-bas ne convient pas à son atténuation.

### 2.2 Chaîne de mesure modulée

2.2.1 D’après l’énoncé, on veut effectuer la mesure dans un domaine de fréquence où l’amplitude du bruit est minimale. D’après le spectre du bruit, cette zone est voisine de 5 kHz donc on choisit  $f_m = 5 \text{ kHz}$ . Spectre du signal de sortie de l’amplificateur  $V_{\text{OUT}}$  : fig.2.

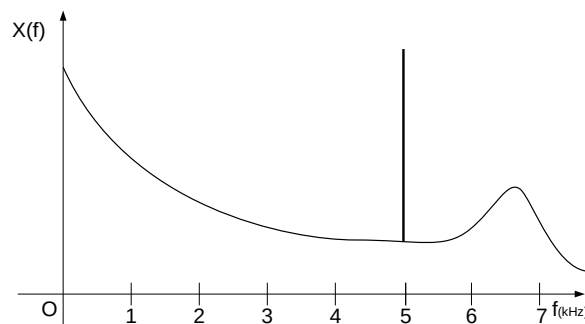


FIGURE 2 – Le spectre du signal de sortie de l’amplificateur  $V_{\text{OUT}}$  est la superposition du spectre continu du bruit et du pic correspondant au spectre du signal utile  $A \cos(\omega_m t)$ .

2.2.2 On donne, fig.3, le diagramme de Bode en gain du filtre utilisé pour sélectionner le signal utile.

2.2.2.1 La diagramme de Bode montre que le filtre est un passe-bande

2.2.2.2 La signal utile est harmonique de fréquence  $f_m$ . Pour le sélectionner, il faut donc choisir  $f_0 = f_m = 5 \text{ kHz}$  comme fréquence centrale.

2.2.2.3 Graphiquement (voir fig.3), on lit une largeur de bande passante égale à  $\Delta f = f_0(1,6 - 0,6) = f_0$  soit  $\Delta f = 5 \text{ kHz}$ .

2.2.3 On sait que pour un filtre passe-bande  $Q = \frac{\Delta f}{f_0}$ . A.N. :  $Q = 1$  pour l’exemple de filtre fourni.

2.2.4 On veut améliorer d’un facteur 20 dB le rapport signal sur bruit  $SNR$  soit :

$$SNR' - SNR = +20 \text{ dB}$$

$$\Leftrightarrow 10 \log \left( \frac{A^2/2}{\frac{\sigma_b^2}{Q}} \right) - 10 \log \left( \frac{A^2/2}{\sigma_b^2} \right) = +20 \text{ dB}$$

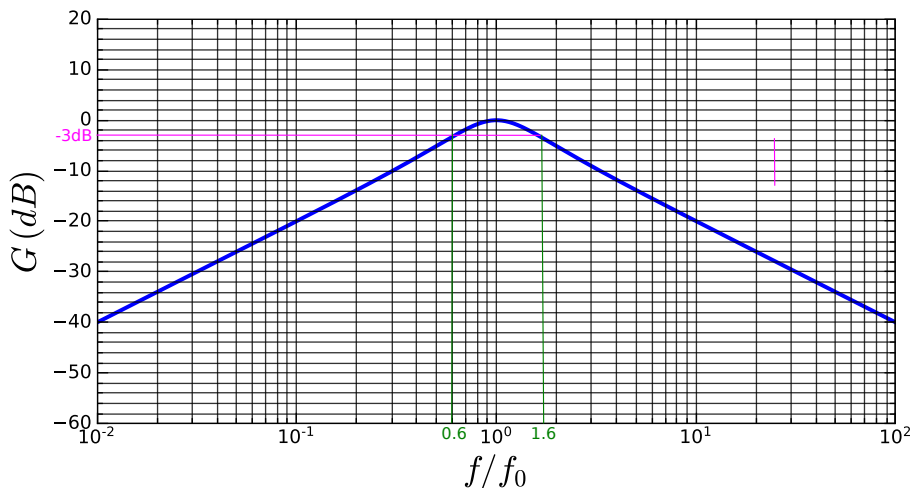


FIGURE 3 – Diagramme de Bode du filtre passe-bande

$$\Leftrightarrow 10 \log Q = 20 \text{ dB}$$

$$\Leftrightarrow \log Q = 2$$

$$\Leftrightarrow \boxed{Q = 100}$$

### 2.3 Détection synchrone

#### 2.3.1 Fréquences contenues dans $s_{1,1}(t)$ ?

$$s_{1,1}(t) = A \cos(\omega_m t) \cdot p(t) = A \cos(\omega_m t) \cdot E \cos(\omega_m t) = AE \cos(\omega t)^2 = \frac{AE}{2} + \frac{AE}{2} \cos(2\omega_m t)$$

Le signal  $s_{1,1}(t)$  contient donc les fréquences  $f = 0$  et  $f = 2f_m = 10 \text{ kHz}$ .

#### 2.3.2 Spectre fréquentiel de $s_{1,1}(t)$ : fig.4

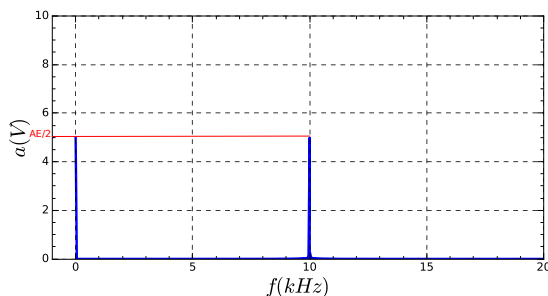
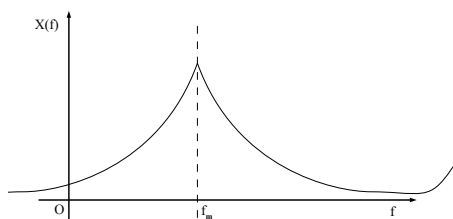


FIGURE 4 – Spectre du signal  $s_{1,1} = A \cos(\omega_m t) \cdot p(t) = \frac{AE}{2} + \frac{AE}{2} \cos(2\omega_m t)$

#### 2.3.3 On donne, fig.5 l’allure du spectre fréquentielle de $s_{1,2}(t)$ .

FIGURE 5 – Spectre de  $s_{1,2}(t)$ 

Le filtre doit conserver essentiellement la valeur moyenne c’est-à-dire la composante continu de  $s_{1,1}(t)$  et éliminer la composante de fréquence  $2f_m$  ainsi qu’atténuer le plus possible le bruit dont on voit qu’il est maximum au voisinage de  $f_m$ . Il faut donc choisir un filtre passe-bas de fréquence  $f_c \ll f_m$ . Par exemple, on peut prendre  $f_c = 1$  Hz.

## Problème 2 – Piège de Paul pour des ions

### 1. Préliminaire

- 1.1 D’un point de vue dimensionnel, on a  $\phi = MT^{-2}$ . En déduire la dimension de  $a$  et  $b$ .  
Par homogénéité de l’équation (1) :

$$[a] = [b] \quad \text{et} \quad [\phi a]L^2 = [E]$$

D’où :

$$[a] = [b] = \frac{[E]}{[\phi]L^2} = \frac{ML^2T^{-2}}{MT^{-2}L^2}$$

$$[a] = [b] = \emptyset$$

$a$  et  $b$  sont des nombres sans dimension.

- 1.2 Exemples de forces conservatives :

Poids	$\vec{P} = -mg\vec{e}_z$	$E_{p,p} = mgz + C$
Tension d’un ressort	$\vec{T} = -k(l - l_0)\vec{e}_x$	$E_{p,el} = \frac{1}{2}k(l - l_0)^2 + C$
Force Coulombienne	$\vec{F} = \frac{q_1q_2}{4\pi\epsilon_0r^2}\vec{u}_r$	$E_{p,e} = \frac{q_1q_2}{4\pi\epsilon_0r} + C$

Voir cours pour les démonstrations.

- 1.3 Le système {masse+ressort} est l’archétype de l’oscillateur harmonique.

### 2. Étude d’un mouvement unidimensionnel

Un point matériel  $M$  de masse  $m$  se déplace le long d’un axe  $Ox$  (donc  $\vec{OM} = x\vec{e}_x$ ), au voisinage du point  $O$ . Pour cette étude, la seule force  $\vec{F}$  à considérer dérive de l’énergie potentielle :

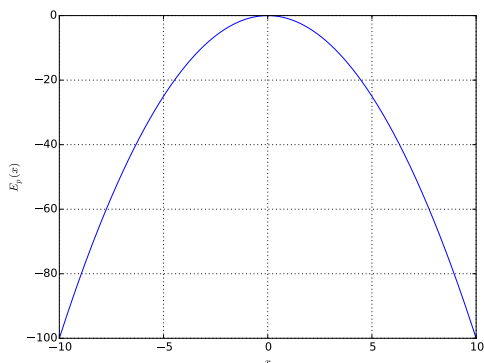
$$E_p(x) = Kx^2$$

où  $K$  est une constante positive ou négative.

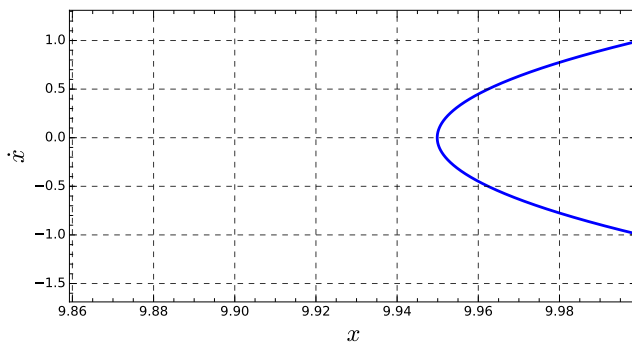
- 2.1 Conditions initiales? La trajectoire de phase est parcourue dans le sens horaire donc ; d’après la trajectoire de phase (b), les conditions initiales sont  $x = 10$  et  $\dot{x} = -1$ .

- 2.2 Voir fig.6.

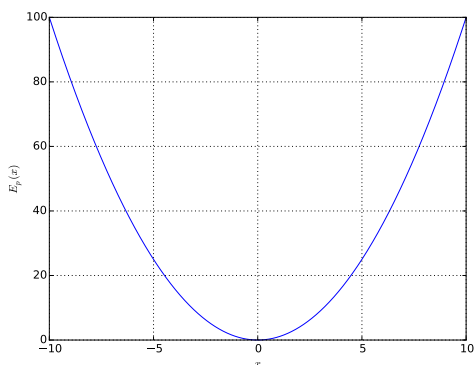
### 3. Etude du régime statique appliqué à une particule de mouvement tridimensionnel



(a) Si  $K < 0$ , l’énergie potentielle à l’aspect d’une barrière.



(b) La particule est repoussée par la barrière de potentielle.



(c) Si  $K > 0$ , l’énergie potentielle à l’aspect d’un puits. (d) La particule est piégée dans le puits. Elle oscille autour de la position d’équilibre  $x = 0$

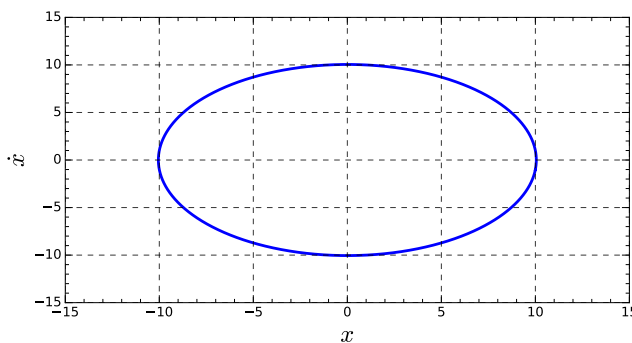


FIGURE 6 – Trajectoires de phase pour  $K > 0$  et  $K < 0$ .

3.1 Exprimons la force  $\vec{F}$  subit par la particule dans le piège.  $\vec{F}$  dérive de l’énergie potentielle :

$$E_p = \phi_0(ax^2 + ay^2 + bz^2)$$

donc :

$$\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}E_p$$

$$\vec{F} = \phi_0 \begin{pmatrix} 2ax \\ 2ay \\ 2bz \end{pmatrix}$$

3.2 Appliquons la relation fondamentale de la dynamique à la particule dans le référentiel d’étude supposé galiléen :

$$m\vec{a} = \vec{F}$$

Par projection sur les vecteurs de la base cartésiennes, on obtient :

$$\begin{cases} \ddot{x} + \frac{2a}{m}x = 0 & (1) \\ \ddot{y} + \frac{2a}{m}y = 0 & (2) \\ \ddot{z} + \frac{2b}{m}z = 0 & (3) \end{cases}$$

3.3 On admet qu’en conséquence des équations fondamentales de l’électromagnétisme, dans ce cas statique,  $a$  et  $b$  doivent vérifier la relation :

$$2a + b = 0$$

Dans ce cas, soit :

- $a \geq 0 \Rightarrow b = -2a \leq 0$ . Les solutions des équations (1) et (2) sont alors des fonctions sinusoïdales donc la particule est piégée suivant les directions  $Ox$  et  $Oy$ . Mais la solution de l’équation (3) est du type  $z(t) = A \exp \sqrt{\frac{2b}{m}}t + B \exp -\sqrt{\frac{2b}{m}}t$  qui diverge avec le temps. La particule n’est pas piégée suivant  $Oz$  et peut s’échapper. Globalement, la particule n’est donc pas piégée par ce piège !
- $a \leq 0 \Rightarrow b = -2a \geq 0$ . Un raisonnement analogue au précédent permet de conclure que la particule est confinée suivant  $Oz$  mais pas suivant  $Ox$  et  $Oy$ .

Ainsi la particule ne peut pas être piégée de cette façon.

#### 4. Étude du régime dynamique appliqué à une particule de mouvement tridimensionnel

4.1 Par analyse dimensionnelle, déterminons fréquence  $\omega_0$  caractéristique du piège en fonction  $\phi_0$  et  $m$ .

$$[\phi_0] = MT^{-2} \quad \text{et} \quad [m] = M$$

D’où :

$$\left[ \sqrt{\frac{\phi_0}{m}} \right] = T^{-1}$$

Donc on peut proposer  $\omega_0 = \sqrt{\frac{\phi_0}{m}}$  comme pulsation caractéristique du piège.

Dans le cas où  $\Omega \gg \omega_0$ , on montre que tout se passe, approximativement, comme si la particule évoluait avec une énergie potentielle effective :

$$E_{p,\text{eff}} = \frac{m\omega_0^4}{16\Omega^2}(x^2 + y^2 + 4z^2)$$

4.2 Équations différentielles vérifiées par  $x$ ,  $y$  et  $z$  :

$$\begin{cases} \ddot{x} + \frac{\omega_0^4}{8\Omega^2}x = 0 \\ \ddot{y} + \frac{\omega_0^4}{8\Omega^2}y = 0 \\ \ddot{z} + \frac{\omega_0^4}{2\Omega^2}z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{x} + \omega_x^2 x = 0 & (4) & \omega_x = \frac{\omega_0^2}{2\sqrt{2}\Omega} \\ \ddot{y} + \omega_y^2 y = 0 & (5) & \omega_y = \frac{\omega_0^2}{2\sqrt{2}\Omega} \\ \ddot{z} + \omega_z^2 z = 0 & (6) & \omega_z = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{2}\Omega} \end{cases}$$

4.3 Comme  $\omega_x$ ,  $\omega_y$  et  $\omega_z$ , les équations (4), (5) et (6) sont des équations d’oscillateurs harmoniques. Les solutions sinusoïdales et donc bornées : la particule est confinée dans les trois directions de l’espace.

4.4 L’intégration des équations (4), (5) et (6) entre 0 et  $t$  conduit à :

$$\begin{cases} x(t) = A_x \cos(\omega_x t) + B_x \sin(\omega_x t) \\ y(t) = A_y \cos(\omega_y t) + B_y \sin(\omega_y t) \\ z(t) = A_z \cos(\omega_z t) + B_z \sin(\omega_z t) \end{cases}$$

Les conditions initiales sur la positions imposent :

$$\begin{cases} x(t=0) = 0 \\ y(t=0) = 0 \\ z(t=0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_x = 0 \\ A_y = 0 \\ A_z = 0 \end{cases}$$

Les conditions initiales sur la vitesse imposent :

$$\begin{cases} \dot{x}(t=0) = v_0 \\ \dot{y}(t=0) = v_0 \\ \dot{z}(t=0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \omega_x B_x = v_0 \\ \omega_y B_y = 0 \\ \omega_z B_z = v_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B_x = v_0 \frac{2\sqrt{2}\Omega}{\omega_0^2} \\ B_y = 0 \\ B_z = v_0 \frac{\sqrt{2}\Omega}{\omega_0^2} \end{cases}$$

D’où les solutions, en posant  $2\omega = \omega_z = 2\omega_x$  :

$$\begin{cases} x(t) = v_0 \frac{2\sqrt{2}\Omega}{\omega_0^2} \sin(\omega t) \\ y(t) = 0 \\ z(t) = v_0 \frac{\sqrt{2}\Omega}{\omega_0^2} \sin(2\omega t) \end{cases}$$

4.5 L’allure de la trajectoire de la particule est tracée fig.8.

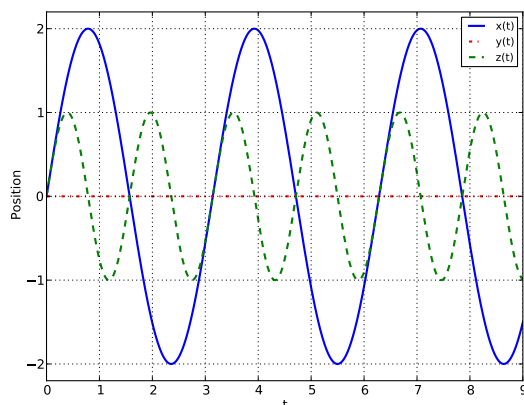


FIGURE 7 – Mouvement de l’ion suivant les trois direction de l’espace.

La période globale du mouvement est la plus grande parmi  $T_x$  et  $T_z$ . C’est donc  $T_x = 2T_z$ . Ainsi sur une période  $T$ ,  $x(t)$  atteint deux extrema tandis que  $z(t)$  en rencontre quatre. Ainsi l’axe horizontal est  $Ox$  et l’axe vertical est  $Oz$ .

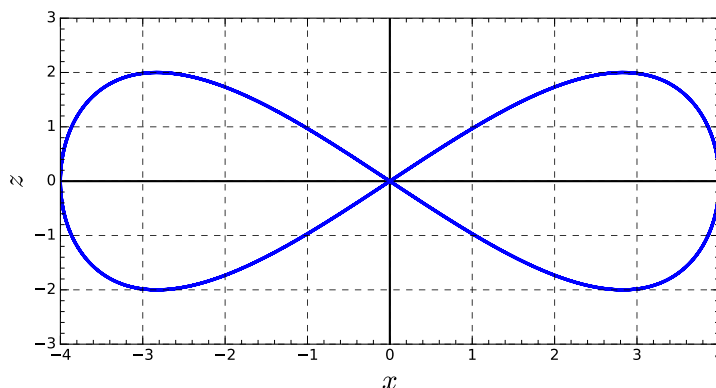
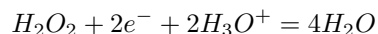


FIGURE 8 – Trajectoire de l’ion dans le piège de Paul

**Problème 3 – Dosage d’une solution de peroxyde d’hydrogène (eau oxygénée)**

1. Demi-équation électronique du couple  $H_2O_2/H_2O$ .



2. Potentiel du couple peroxyde d’hydrogène / eau.

$$2.1 \quad E(H_2O_2/H_2O) = E^0(H_2O_2/H_2O) + \frac{0,06}{2} \log \left( \frac{[H_2O_2][H_3O^+]^2}{(C^0)^3} \right)$$

$$E(H_2O_2/H_2O) = E^0(H_2O_2/H_2O) - 0,06pH + 0,03 \log \left( \frac{C_B}{C^0} \right)$$

2.2 Calculons pour  $C_B = 0,040 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$  la valeur numérique de ce potentiel :

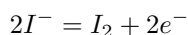
$$2.2.1 \quad \text{Quand le } pH \text{ de la solution est égal à } 2,0 : E(H_2O_2/H_2O) = 1,61 \text{ V}$$

$$2.2.2 \quad \text{Quand le } pH \text{ de la solution est égal à } 8,0 : E(H_2O_2/H_2O) = 1,25 \text{ V}$$

2.2.3 La réduction du peroxyde d’oxygène sera d’autant plus aisée que sa force oxydante est grande c’est-à-dire que son potentiel est élevé dans le milieu réactionnel. Or le potentiel du couple  $H_2O_2/H_2O$  est une fonction décroissante du  $pH$  donc il faut se placer en milieu acide.

3. Potentiel du couple diiode / iodure.

3.1 Écrire la demi-équation électronique du couple  $I_2/I^-$  :



3.2 Calculons le potentiel du couple  $I_2/I^-$  pour une solution aqueuse ayant pour concentrations molaires  $[I^-] = 0,030 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$  et  $[I_2] = 0,0010 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ .

$$E(I_2/I^-) = E^0(I_2/I^-) + 0,03 \log \left( \frac{[I_2]C^0}{[I^-]^2} \right)$$

$$\text{A.N. : } E(I_2/I^-) \approx 0,62 \text{ V}$$

4. Complexation du diiode par les ions iodures.

L’équation bilan traduisant cette réaction de complexation est :  $I_{2(aq)} + I_{(aq)}^- = I_{3(aq)}^-$ . Sa constante d’équilibre à 25 °C est  $K^0 = 750$ . Le diiode étant peu soluble dans l’eau (solubilité égale à  $1,34 \times 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$  à 25 °C) alors que  $I_3^-$  l’est, cette réaction de complexation permet, en présence d’ions  $I^-$ , d’éviter la formation de diiode solide lors de l’oxydation de  $I^-$ .

4.1 Calculons la concentration molaire  $[I_3^-]$  de la solution aqueuse.

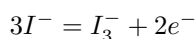
$K^0$  est la constante de l’équilibre  $I_{2(aq)} + I_{(aq)}^- = I_{3(aq)}^-$ . A l’équilibre, le système vérifie la loi d’action de masses :

$$\frac{[I_3^-]C^0}{[I_2][I^-]} = K^0$$

$$[I_3^-] = \frac{K^0}{C^0} [I_2][I^-]$$

$$\text{A.N. : } [I_3^-] = 2,25 \times 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

4.2 Demi-équation électronique du couple  $I_3^-/I^-$  :





4.3 Calculons le potentiel standard du couple  $I_3^-/I^-$ .

Dans le milieu réactionnel coexistent les espèces iodées  $I^-$ ,  $I_2$  et  $I_3^-$ . Nous utilisons l'unicité du potentiel  $E$  du milieu à l'équilibre. D'une part, à l'équilibre, on peut écrire relativement au couple  $I_2/I^-$  :

$$E = E(I_2/I^-) = E^\circ(I_2/I^-) + 0,03 \log \left( \frac{[I_2]C^0}{[I^-]^2} \right)$$

D'autre part, à l'équilibre, on peut écrire relativement au couple  $I_3^-/I^-$  :

$$E = E(I_3^-/I^-) = E^\circ(I_3^-/I^-) + 0,03 \log \left( \frac{[I_3^-](C^0)^2}{[I^-]^3} \right)$$

On en déduit :

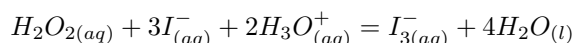
$$E^\circ(I_3^-/I^-) = E^\circ(I_2/I^-) + 0,03 \log \left( \frac{[I_2]C^0}{[I^-]^2} \right) - 0,03 \log \left( \frac{[I_3^-](C^0)^2}{[I^-]^3} \right)$$

$$E^\circ(I_3^-/I^-) = E^\circ(I_2/I^-) + 0,03 \log \left( \frac{[I_2][I^-]}{[I_3^-]C^0} \right)$$

$$E^\circ(I_3^-/I^-) = E^\circ(I_2/I^-) - 0,03 \log K^\circ$$

A.N. :  $E^\circ(I_3^-/I^-) = 0,53 \text{ V}$

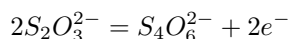
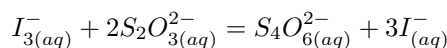
La complexation du diiode par les ions iodure diminue sa force oxydante.

4.4 En combinant les demi-équations électroniques relatives à chacun des couples mis en jeu, on obtient l'équation bilan traduisant l'oxydation des ions  $I^-$  en  $I_3^-$  par le peroxyde d'hydrogène en milieu acide.4.5 Constante d'équilibre  $K_3^\circ$  de la réaction ci-dessus :

$$K_3^\circ = 10 \left( \frac{E^\circ(H_2O_2/H_2O) - E^\circ(I_3^-/I^-)}{0,03} \right)$$

A.N. :  $K_3^\circ = 2,15 \times 10^{41}$

## 5. Dosage par le thiosulfate de sodium

5.1 Demi-équation électronique du couple  $S_4O_6^{2-}/S_2O_3^{2-}$ .5.2 Équation bilan traduisant la réduction des ions  $I_3^-$  par le thiosulfate.5.3 Volume de solution de thiosulfate  $V_T$  qu'il faut verser pour réduire tous les ions  $I_3^-$  en  $I^-$ .

À l'équivalence, les réactifs ont été introduit dans les proportions dans les quantités stoechiométriques donc :

$$\frac{n_{I_3^-}}{1} = \frac{n_{S_2O_3^{2-}}}{2}$$

avec  $n_{S_2O_3^{2-}} = C_T V_T$  et  $n_{I_3^-} = C_B V_B$  d'après les équations chimiques de réduction de l'eau oxygénée par  $I^-$  puis de complexation du  $I_2$  en  $I_3^-$  (une mole donne une mole dans les deux cas).

Finalement :

$$V_T = 2 \frac{C_B V_B}{C_T}$$

A.N. :  $V_T = 16 \text{ mL}$

## Problème 4 – Quelques aspects thermodynamiques de l'atmosphère

### 1. Équilibre isotherme de l'atmosphère

1.1 On note  $\mu$  la masse volumique de l'air.

1.1.1

$$M_a = 0,8M_{N_2} + 0,2M_{O_2}$$

A.N. :  $M_a = 28,8 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$

1.1.2 Équation d'état du gaz parfait :  $PV = nRT$  avec  $\mu = \frac{n}{V} = \frac{\mu}{M_a}$  :

$$P = \mu R_a T \quad \text{avec} \quad R_a = \frac{R}{M_a}$$

A.N. :  $R_a = 288,7 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$

1.1.3 Système : élément de fluide situé entre  $z$  et  $z + dz$  et de section transversale  $S$ . Sa masse est  $dm = \mu S dz$ .

A l'équilibre :

$$-P(z + dz)S + P(z)S - \mu S dz g = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dP(z)}{dz} = -\mu g$$

1.2 Modèle de l'atmosphère isotherme :  $T(z) = T_0 = \text{cste}$ .

1.2.1 Champ de pression  $P(z)$  et champ de masse volumique  $\mu(z)$ .

$$\Rightarrow \frac{dP(z)}{dz} = -\mu g$$

$$\Rightarrow dP(z) = -\mu g dz$$

$$\Rightarrow dP(z) = -\frac{P}{R_a T_0} g dz$$

$$\Rightarrow \frac{dP(z)}{dz} = -\frac{g}{R_a T_0} z$$

$$\Rightarrow P(z) = P_0 e^{-\left(\frac{z}{H}\right)} \quad \text{avec} \quad H = \frac{R_a T_0}{g}$$

$$\Rightarrow \mu(z) = \mu_0 e^{-\left(\frac{z}{H}\right)} \quad \text{avec} \quad \mu_0 = \frac{P_0}{R_a T_0}$$

A.N. :  $H = 8,82 \text{ km}$ .

1.2.2 Sur une hauteur  $h \ll H$ ,  $e^{-\left(\frac{z}{H}\right)} = 1$  à l'ordre 0 en  $h/H$  et on peut donc considérer que  $P(z)$  et  $\mu(z)$ . C'est une bonne approximation sur quelques centaines de mètres.

### 2. Stabilité de l'atmosphère isotherme

2.1 Capacités thermiques molaires du gaz parfait :

$$\boxed{C_{vm} = \frac{R}{\gamma - 1}} \quad \boxed{C_{pm} = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}}$$

Capacité thermique massique à pression constante :

$$\boxed{c_p = \frac{\gamma R_a}{\gamma - 1}}$$

A.N. :  $c_p = 1,01 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$ .

2.2 Équilibre thermique de la parcelle d’air à l’altitude  $z_0$  :  $\boxed{T_1 = T(z_0)}$ . Équilibre mécanique de la

parcelle d’air à l’altitude  $z_0$  :  $\boxed{P_1 = P(z_0)}$ .

2.3 Variation de pression de la parcelle d’air avec l’altitude :  $\delta P_1 = P(z_0 + \varepsilon) - P(z_0)$ .

$$\Rightarrow P_1(z_0 + \varepsilon) = P(z_0) e^{-\frac{z_0 + \varepsilon}{H}}$$

$$\Rightarrow P_1(z_0 + \varepsilon) \approx P_1(z_0) \left(1 - \frac{\varepsilon}{H}\right)$$

$$\Rightarrow \delta P_1 \approx -P_1(z_0) \frac{\varepsilon}{H}$$

$$\Rightarrow \boxed{\delta P_1 \approx -\mu(z_0)g\varepsilon}$$

Variation de masse volumique de l’air environnant avec l’altitude :  $\delta\mu = \frac{\delta P_1}{R_a T_0}$

$$\boxed{\delta\mu = -\frac{\mu(z_0)g}{R_a T_0} \varepsilon}$$

2.4 Évolution adiabatique réversible d’un échantillon de gaz parfait donc on peut appliquer la loi de Laplace :

$$P(z_0)V_1(z_0)^\gamma = P(z_0 + \varepsilon)V_1(z_0 + \varepsilon)^\gamma$$

$$\text{avec } \delta P_1 = P(z_0 + \varepsilon) - P(z_0) \quad \text{et} \quad \delta V_1 = V_1(z_0 + \varepsilon) - V_1(z_0)$$

$$\Leftrightarrow \delta(PV_1^\gamma) = 0$$

$$\Rightarrow \delta(\ln(PV_1^\gamma)) = 0$$

$$\boxed{\frac{\delta P_1}{P(z_0)} + \gamma \frac{\delta V_1}{V_1(z_0)} = 0}$$

D’où :

$$\boxed{\delta V_1 = \frac{V_1(z_0)g}{\gamma R_a T_0} \varepsilon}$$

## 2.5 Poussée d’Archimède.

$$\vec{\Pi}_a = -\mu(z)V(z)\vec{g}$$

$$\vec{\Pi}_a = -(\mu + \delta\mu)(V_1 + \delta V_1)\vec{g}$$

$$\vec{\Pi}_a = -\vec{g}(\mu V_1 + \mu\delta V_1 + \delta\mu V_1 + \delta\mu\delta V_1)$$

En remplaçant  $\delta\mu$  et  $\delta V_1$  par leurs expressions, on trouve :

$$\vec{\Pi}_a = -m_1\vec{g} + \frac{m_1g}{R_a T_0} \left( \frac{\gamma - 1}{\gamma} \right) \varepsilon\vec{g}$$

Résultante des forces.

$$\vec{F} = \vec{P} + \vec{\Pi}_a$$

$$\text{avec } \vec{P} = m_1\vec{g}$$

$$\vec{F} = \frac{m_1g}{R_a T_0} \left( \frac{\gamma - 1}{\gamma} \right) \varepsilon\vec{g}$$

## 2.6 Équation du mouvement vertical de la parcelle d’air.

$$m_1\ddot{z} = -\frac{m_1g}{R_a T_0} \left( \frac{\gamma - 1}{\gamma} \right) g\varepsilon$$

$$\text{avec } c_p = \frac{\gamma R_a}{\gamma - 1}$$

$$\frac{d^2\varepsilon}{dt^2} + N^2\varepsilon = 0 \quad \text{avec} \quad N = \sqrt{\frac{g^2}{c_p T_0}}$$

$[N] \equiv [T]^{-1}$  et  $N > 0$ , on reconnaît l’équation d’un oscillateur harmonique de période  $2\pi/N \approx 11,5$  s. Puisque chaque parcelle d’air oscille autour de sa position d’équilibre, on peut dire que l’atmosphère isotherme est stable. Ce modèle n’est réaliste que dans les zones de l’atmosphère où la température est à peu près constante.