



CONCOURS BLANC – PHYSIQUE

D.Malka – MPSI 2019-2020 – Lycée Jeanne d’Albret

20.05.2020

Durée de l’épreuve : 4h00

L’usage de la calculatrice est autorisé.

L’énoncé de ce devoir comporte 10 pages.

- Si, au cours de l’épreuve, vous repérez ce qui vous semble être une erreur d’énoncé, signalez le sur votre copie et poursuivez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous êtes amené à prendre.
- Il ne faudra pas hésiter à formuler des commentaires. Le barème tiendra compte de ces initiatives ainsi que des qualités de rédaction de la copie.
- La numérotation des exercices doit être respectée. Les résultats doivent être systématiquement encadrés.
- Les pages doivent être numérotées de la façon suivante : n° page courante/nombre total de pages.

Problème 1 – Étude du mouvement d’un satellite

La Terre est assimilée à une boule homogène de centre O , de rayon $R = 6370$ km et de masse $M = 5,98 \times 10^{24}$ kg. On note $k = 6,67 \times 10^{-11}$ U · S · I la constante de gravitation universelle. On étudie le mouvement du centre d’inertie G d’un satellite de masse $m = 1,0 \times 10^3$ kg en se plaçant dans le référentiel géocentrique supposé galiléen. Le satellite évolue à une altitude suffisamment importante pour qu’on puisse négliger l’action de l’atmosphère terrestre. La figure fig.1, qui n’est pas à l’échelle, précise les coordonnées adoptées pour ce problème.

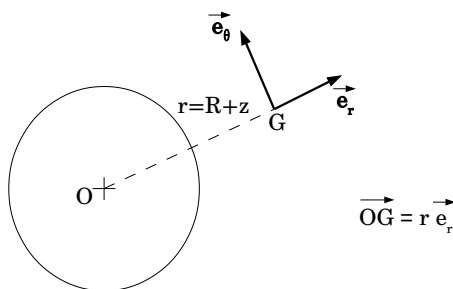


FIGURE 1 – Paramétrage de la trajectoire du satellite

1. Analyse qualitative

- 1.1 Donner l’expression de la force de gravitation \vec{F} exercée par la Terre sur le satellite. On note respectivement M, L, T la dimension d’une masse, d’une longueur et d’un temps. Déterminer la dimension de la constante de gravitation en fonction des symboles M, L, T .
- 1.2 Définir le référentiel géocentrique. Ce référentiel est-il solidaire de la Terre dans son mouvement de rotation autour des pôles ? Indiquer pourquoi ce référentiel n’est pas en toute rigueur galiléen. Citer le nom d’un référentiel galiléen.
- 1.3 Démontrer l’expression de l’énergie potentielle de gravitation $E_p(z)$ en fonction de $z = r - R$. Que peut-on dire de l’énergie mécanique du système ? Définir les termes « état lié » et « état de diffusion » pour un système soumis à une force conservative.

- 1.4 Donner l’ordre de grandeur de la hauteur de l’atmosphère terrestre. Si l’on tenait compte de l’action de l’atmosphère sur le satellite comment évoluerait qualitativement l’énergie mécanique du satellite (on justifiera la réponse) ? En déduire l’évolution qualitative de l’altitude z et la vitesse v du satellite si l’on prenait en compte l’action de l’atmosphère terrestre.

2. Étude de la trajectoire circulaire du satellite

- 2.1 Montrer que le mouvement de G est plan. Préciser alors le plan de la trajectoire.
- 2.2 Dans le plan du mouvement, on repère la position de G par ses coordonnées polaires r, θ . Montrer que l’accélération de G s’écrit :

$$\vec{a} = \left(\frac{d^2r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right) \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{d\theta}{dt} \right) \vec{e}_\theta$$

Déterminer les deux équations du mouvement. On notera C la constante mise en évidence dans l’une des équations.

- 2.3 On étudie la possibilité d’une trajectoire circulaire de rayon $r = r_0$. Montrer que le mouvement est uniforme. Déterminer alors la vitesse angulaire $\frac{d\theta}{dt} = \omega_0$ du mouvement en fonction de k, M et r_0 . Déterminer la constante C en fonction de k, M et r_0 .
- 2.4 Le satellite évolue à une altitude $z = 600$ km sur une trajectoire circulaire. Calculer numériquement :

- la période de révolution $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ dans le référentiel géocentrique,
- l’énergie mécanique E_m ,
- la constante C .

- 2.5 On suppose dorénavant que le satellite possède une trajectoire circulaire contenue dans le plan équatorial. On note $T \approx 24$ h la période de révolution terrestre dans son mouvement autour de l’axe des pôles. Évaluer la période relative T_r de révolution du satellite pour un observateur terrestre en fonction des paramètres T_0 et T .

On tiendra compte d’une part du fait que le satellite possède une période de rotation T_0 inférieure à la période de rotation terrestre et, d’autre part, du fait que le satellite et la Terre tournent dans le même sens.

- 2.6 Calculer numériquement la période T_r pour un satellite évoluant à une altitude $z = 600$ km.

3. Étude de la stabilité de la trajectoire circulaire

On se place de nouveau dans le **référentiel géocentrique**. Afin d’étudier la stabilité de la trajectoire circulaire, on suppose qu’à un instant pris comme origine des dates le satellite est faiblement écarté de sa trajectoire circulaire. On pose $r = r_0(1 + \varepsilon)$ avec $\varepsilon \ll 1$. On note $\varepsilon_0 = \varepsilon(t = 0)$ et on suppose que $\frac{d\varepsilon}{dt}(t = 0) = 0$.

Dans toute la suite du problème on raisonnera au premier ordre en ε . Compte tenu des hypothèses, on admettra qu’on peut écrire au premier ordre $r^2 \frac{d\theta}{dt} \approx C$ où la constante C a la valeur calculée à la question 2.3.

- 3.1 Déterminer, **sans approximation** supplémentaire, l’équation vérifiée par la variable ε . On établira une équation où ne figure plus le paramètre θ .
- 3.2 Montrer qu’au premier ordre l’équation précédente s’écrit $\frac{d^2\varepsilon}{dt^2} = -\omega_1^2\varepsilon$. Donner l’expression de la pulsation ω_1 . Que remarque-t-on ? Conclure quant à la stabilité de la trajectoire. Déterminer $\varepsilon(t)$.
- 3.3 Exprimer au premier ordre la pulsation $\frac{d\theta}{dt}$ en fonction du temps et des données du problème. Quel résultat retrouve-t-on si dans l’expression précédente on réalise $\varepsilon_0 = 0$?
- 3.4 Esquisser la forme de la trajectoire issue de l’analyse précédente. Quelle est la forme de la trajectoire exacte ? Quelle conclusion peut-on faire concernant les résultats obtenus précédemment ? On s’attachera, en particulier, à discuter l’existence de trajectoire circulaire pour le mouvement du centre d’inertie G du satellite.

Problème 2 – Vibration d’un verre à pied

Dans le vingt-et-unième album de la série Les Aventures de Tintin, intitulé Les Bijoux de la Castafiore, cette dernière est en mesure de faire exploser un verre par la simple utilisation de sa voix. Le présent sujet se penche sur les aspects physiques de ce phénomène. Nous tenterons ainsi de déterminer les circonstances dans lesquelles il est effectivement possible de réaliser une telle prouesse et nous nous pencherons sur les rôles joués par les différents paramètres physiques susceptibles d’influer sur ces circonstances.

Conseils généraux et remarques

- Afin d’en faciliter la lecture et l’analyse, certaines courbes et images expérimentales ont été simplifiées.
- Les applications numériques seront faites avec un nombre adapté de chiffres significatifs.
- Les trois parties du problème sont largement indépendantes, mais les données numériques fournies ou calculées dans les différentes parties sont susceptibles d’être utilisées dans toutes les parties.

I - Analyse expérimentale des vibrations du verre

Il est extrêmement facile, en frappant un verre à pied, d’entendre le son que celui-ci émet. On se propose dans cette partie de déterminer, à partir d’une modélisation simple, quelques propriétés des oscillations libres d’un verre mis ainsi en vibration.

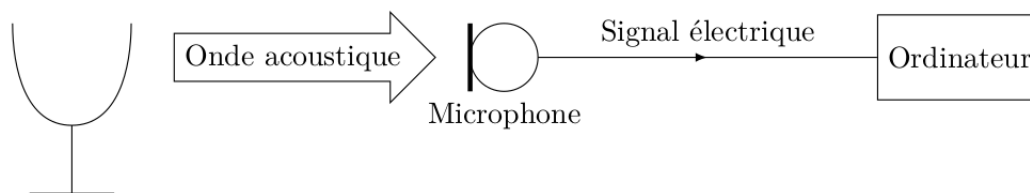


FIGURE 2 – Captation des vibrations du verre

Un verre à pied, d’un diamètre de 12 cm, est frappé, à l’instant $t = 0$, au niveau du bord supérieur à l’aide d’un petit marteau. Le son émis est enregistré par ordinateur. Son analyse spectrale peut alors être réalisée à tout moment de l’enregistrement. Le microphone utilisé pour l’enregistrement présente une courbe de réponse en fonction de la fréquence donnée sur la figure 3.

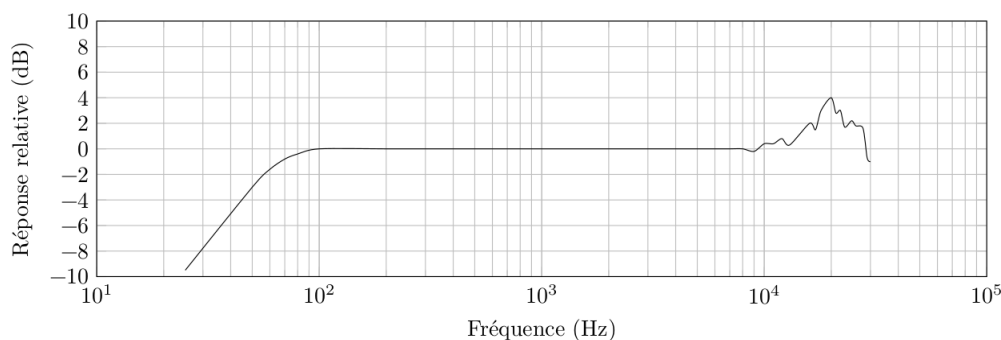


FIGURE 3 – Réponse relative du microphone en fonction de la fréquence

La figure 4 représente le chronogramme de cet enregistrement et la figure 4 une analyse spectrale réalisée peu après le début de l’enregistrement. La figure 5 présente son analyse spectrale aux dates $t = 1,0, 2,0, 3,0$ et $4,0$ s.

I.A – Analyse qualitative de l’enregistrement

Les « pics » représentés dans les analyses spectrales correspondent à des modes propres de vibration du verre.

1. Que signifie sur l’onde de vibration du verre la présence de modes propres dans le signal enregistré ? Comment appelle-t-on encore ces modes propres de vibration ?
2. Quelle est la fréquence du signal enregistré ?

3. En limitant le raisonnement au bord supérieur du verre, estimer la vitesse de propagation de la déformation causée par le choc.

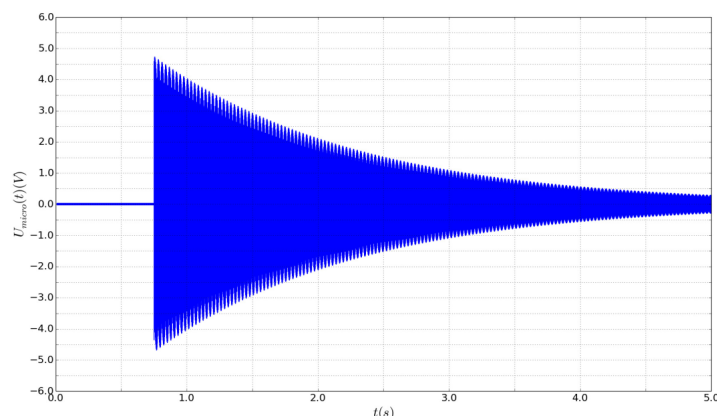


FIGURE 4 – Chronogramme de l’enregistrement sonore du verre

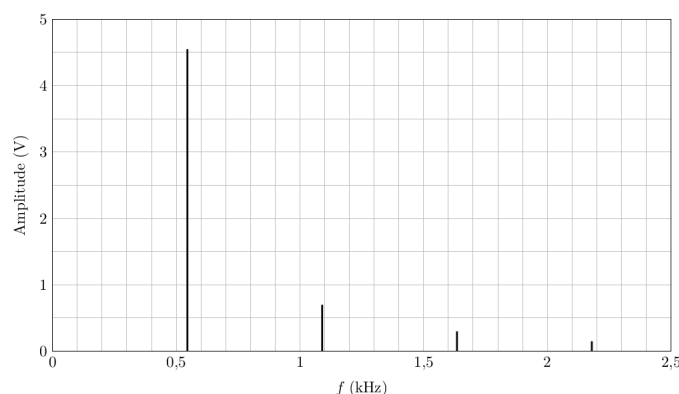


FIGURE 5 – Analyse spectrale du son réalisée peu après la frappe du verre

4. Donner les fréquences des différents modes propres. Elles sont liées par une relation simple ; laquelle ?
5. Quelle caractéristique la courbe de réponse microphone (fig. 3) est essentielle pour réaliser un enregistrement et une analyse spectrale représentant correctement le phénomène étudié ?
6. Quelle(s) autre(s) information(s) peut-on déduire des différentes analyses spectrales ?

I.B – Estimation du facteur de qualité Q

Quand le verre est en vibration, son bord supérieur oscille autour de sa position au repos. Afin d’estimer le facteur de qualité du verre, on le modélise par une masse m mobile sur l’axe (Ox) horizontal associée à un ressort de raideur k , de longueur à vide nulle (figure 7). Les frottements seront, quant à eux, modélisés par un frottement fluide de type $\vec{f} = -\alpha\vec{v}$ où \vec{v} désigne le vecteur vitesse de la masse m .

7. Montrer que l’équation différentielle traduisant l’évolution temporelle de $x(t)$ s’écrit de la façon suivante, avec ω_0 et Q deux constantes que l’on exprimera en fonction de α , k et m :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

8. Quelle est la signification physique de ω_0 et de Q ? Quelles sont les unités de ces deux grandeurs ?
9. Compte tenu du choc initial avec le marteau, déterminer, dans le cas d’un frottement « faible », l’expression approchée de la solution $x(t)$ avec les conditions initiales $x(0) = 0$ et $\frac{dx}{dt}(0) = V_0$. Représenter son allure.
10. L’enregistrement de la figure 4 valide-t-il la modélisation par un frottement fluide ?

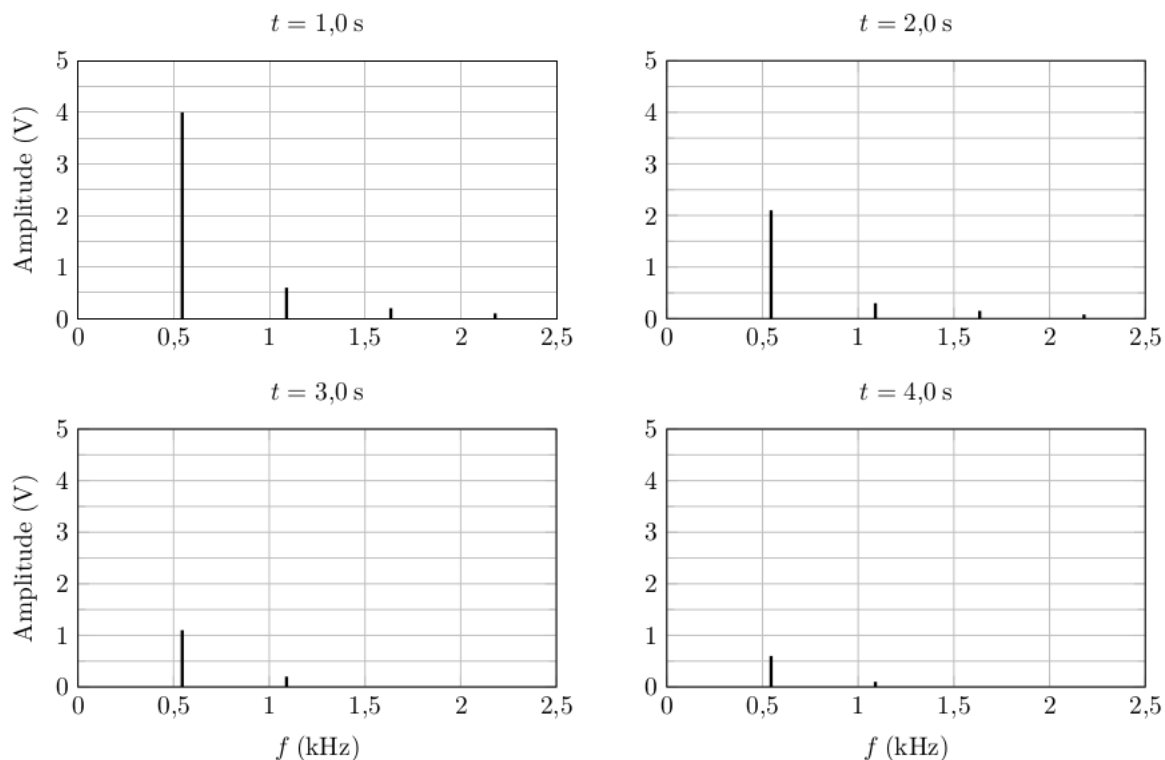


FIGURE 6 – Analyse spectrale du son à différents instants après la frappe du verre



FIGURE 7 – Modèle mécanique de déplacement

11. Proposer, à partir de l’évolution temporelle du mode 1 sur les analyses spectrales, un ordre de grandeur du facteur de qualité Q .

Dans la suite de l’expérience, on va chercher à mettre en résonance le verre à l’aide d’une excitation sinusoïdale.

12. Donner une estimation du temps nécessaire pour mettre le système en régime sinusoïdal forcé.

II Étude de la résonance en amplitude du verre en régime sinusoïdal forcé

On souhaite étudier plus finement la réponse en amplitude du verre au voisinage de la fréquence de résonance du mode 1 précédemment déterminée.

Un hautparleur relié à un générateur basse fréquence produit une onde sonore sinusoïdale de fréquence f . Le verre, placé à proximité du hautparleur (figure 8), est ainsi placé en régime sinusoïdal forcé.

II.A – Approche théorique

L’équation différentielle traduisant l’évolution temporelle de $x(t)$ est alors de la forme suivante, avec $\omega = 2\pi f$ la pulsation et ϕ la phase du signal acoustique délivré par le générateur basse fréquence :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = A \cos(\omega t + \phi)$$

En régime sinusoïdal forcé, la solution est de la forme $x(t) = X \cos(\omega t + \varphi)$. Comme en électrocinétique, on introduit la grandeur complexe associée $\underline{x}(t) = \underline{X} \exp(j\omega t)$ avec $j^2 = -1$.

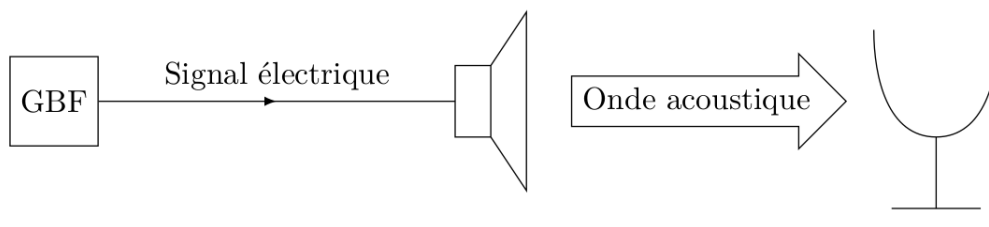


FIGURE 8 – Excitation du verre par un hautparleur

13. Comment nomme-t-on la grandeur \underline{X} ? Que représente son module, son argument ?
14. Établir l’expression du module de \underline{X} en fonction de ω , ω_0 , A_0 et Q .
15. À partir d’une étude qualitative, justifier le numéro de graphe de la figure 9 compatible avec le tracé du module de \underline{X} en fonction de la pulsation ω .

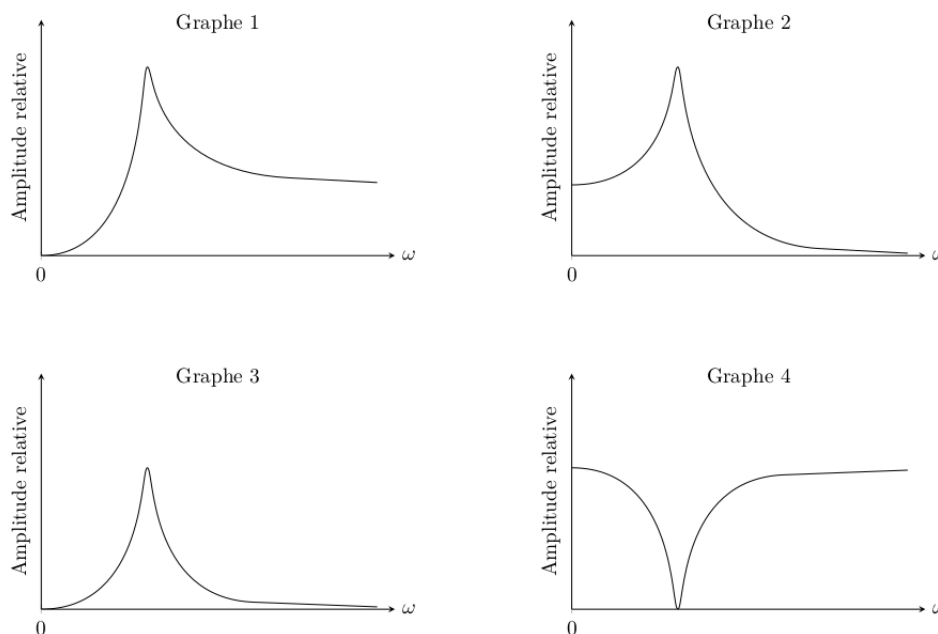


FIGURE 9 – Module de \underline{X} en fonction de ω

16. À quelle condition sur le facteur de qualité peut-on envisager une résonance d’amplitude ? On note Q_0 cette condition.
17. Dans le cas d’une résonance d’amplitude, exprimer la pulsation correspondante, notée ω_r en fonction de ω_0 et Q .
 Dans la suite, on suppose $Q \gg Q_0$.
18. Quelle est alors l’expression de la pulsation de résonance ω_r ?
19. On note X_r le module de \underline{X} pour $\omega = \omega_r$. Établir son expression en fonction de ω_0 , A_0 et Q .
20. Définir les pulsations de coupure ω_1 et ω_2 ($\omega_1 < \omega_2$) du module de \underline{X} . Rappeler la relation liant ω_0 , Q et $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$.

II.B – Tracé expérimental

Le verre utilisé présente, en guise de décoration, une bande de dépôt métallique placée près du bord supérieur. Son rôle de miroir va permettre la réflexion d’une source lumineuse. Le verre est ici localement considéré plat dans le cadre de cette réflexion. Le dispositif réalisé va permettre la mesure des amplitudes de vibration par interférométrie. La fente source monochromatique S (perpendiculaire au plan de la figure), de longueur d’onde $\lambda = 633 \text{ nm}$, est placée à la distance Δ du plan du miroir afin que celui-ci soit utilisé sous incidence rasante. La distance source – bord droit du miroir est notée $l = 20 \text{ cm}$ et la distance entre le miroir et l’écran $d = 30 \text{ cm}$ (figure 10).



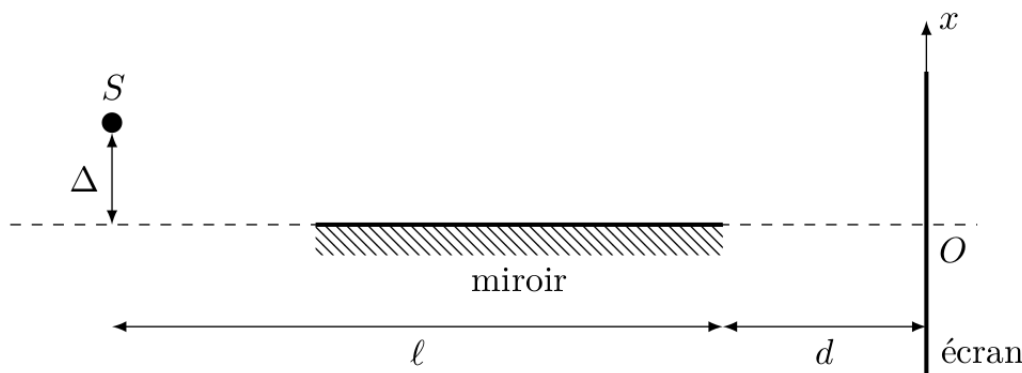


FIGURE 10 – Dispositif interférentiel (échelle non respectée)

21. Reproduire le schéma de la figure 10 et représenter l'image S' de la source S à travers le miroir. Représenter deux rayons atteignant le même point $M(x)$ de l'écran, l'un ayant subi une réflexion sur le miroir et l'autre non. Ces deux rayons interfèrent.
22. On considère un point M d'abscisse x , situé sur l'écran dans le champ d'interférence. En supposant que $\Delta \ll l + d$ et $|x| \ll l + d$, on montre que la différence de marche δ entre les deux rayons représentés à la question précédente s'écrit :

$$\delta = \frac{2\Delta x}{d+l} + \frac{\lambda}{2}$$

Établir l'expression de l'interfrange i : $i = \frac{\lambda(l+d)}{2\Delta}$.

23. Le bord du verre, représenté par le miroir, est animé, en régime sinusoïdal forcé, d'un mouvement de translation dans la direction de l'axe (Ox), d'équation $x_m(t) = X \cos(\omega t + \varphi)$. Déduire l'expression de l'évolution temporelle de l'interfrange en prenant en considération les paramètres de la vibration.
24. Pour une valeur de ω donnée, l'interfrange peut prendre une infinité de valeurs comprises entre deux extrêmes notés i_{\min} et i_{\max} . Exprimer X , amplitude des oscillations, en fonction de d , l , λ , i_{\min} et i_{\max} .
25. Dans l'expérience menée avec le verre, peut-on envisager de suivre à l'œil nu l'évolution de l'interfrange sur l'écran ?

Afin de pouvoir réaliser des mesures dans de bonnes conditions d'observation, on met en œuvre une méthode de stroboscopie en utilisant le capteur d'image CMOS d'une caméra rapide dont la fréquence de prise des images f_i est réglable jusqu'à 100 images par seconde. Le capteur est placé directement dans le champ d'interférence à la place de l'écran. On précise que la résolution du capteur CMOS (taille du pixel) est de $1 \mu\text{m} \times 1 \mu\text{m}$.

26. On cherche à observer une immobilité de la figure d'interférence sur l'image. Exprimer la(les) fréquence(s) de prise de vue f_i possible(s) en fonction de la pulsation ω du générateur basse fréquence.
27. Une fois l'immobilité apparente réalisée sur l'image, expliquer pourquoi la mesure de l'interfrange nécessite de pouvoir régler la phase ϕ du générateur basse fréquence.

Les images données figure 11, représentant un carré de 100 pixels de coté, ont été réalisées pour une pulsation ω proche de la résonance. Seule la phase ϕ du générateur basse fréquence est différente pour chacune d'entre elle.

28. À partir d'une exploitation des figures d'interférence de la figure 11, estimer l'amplitude des oscillations X du verre pour la pulsation ω .

Une série de mesure de l'amplitude X au voisinage de la résonance permet de tracer le graphe représenté sur la figure 12.

29. Déterminer, à partir de la figure 12, la fréquence de résonance f_r et le facteur de qualité Q du verre dans son mode 1. Commenter.
30. Un générateur basse fréquence disponible au laboratoire présente les caractéristiques données dans le tableau ci-dessous. Est-il réaliste de pouvoir mettre en résonance le verre en utilisant celui-ci ?

Fréquence	0,1 Hz à 2,1 MHz sur 6 gammes
Précision	0,5%
Niveau de sortie	20 V crête-crête en circuit ouvert
	10 V crête-crête sur 50 Ω
Alimentation	115 ou 230 Vc.a., 50-60 Hz
Dimensions	200 \times 300 \times 150 mm
Poids	1,8 kg

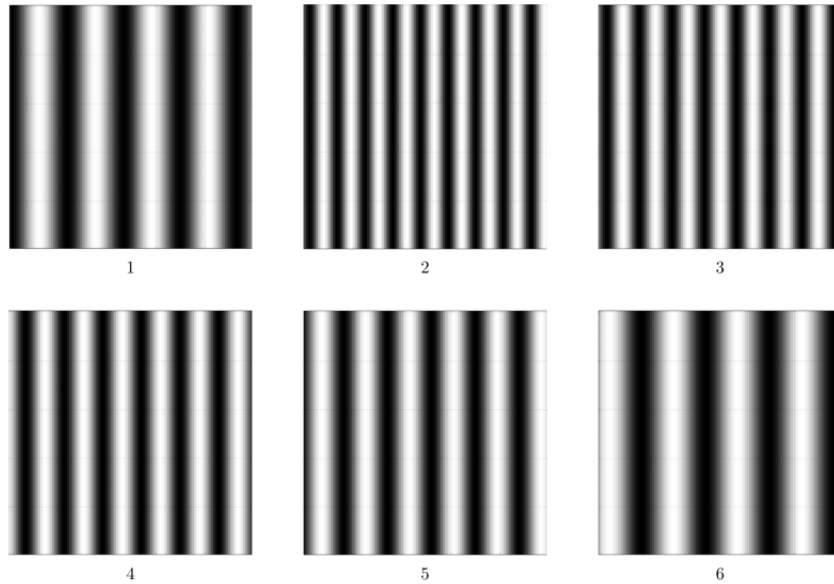
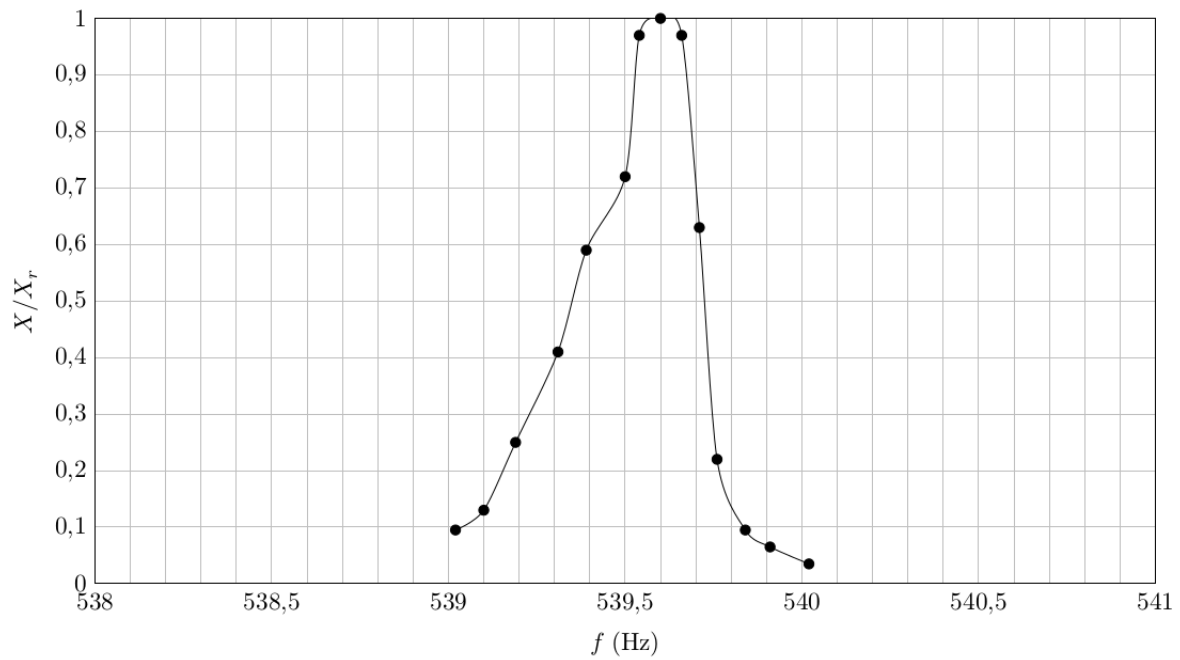
FIGURE 11 – Image du capteur CMOS pour une pulsation ω 

FIGURE 12 – Amplitude relative en fonction de la fréquence

Problème 3 – Compression irréversible et réversible d’un gaz parfait

Un cylindre circulaire d’axe vertical et de section S est fermé par un piston de masse M . Pour traiter l’aspect thermodynamique de ce problème, on négligera les frottements du piston sur le cylindre (NB : ces frottements existent néanmoins et permettent d’atteindre l’état d’équilibre mécanique). On introduit dans le cylindre à température ambiante T une quantité d’azote n telle que le plan inférieur du piston soit, à l’équilibre, à une distance a_1 du fond (fig.13).

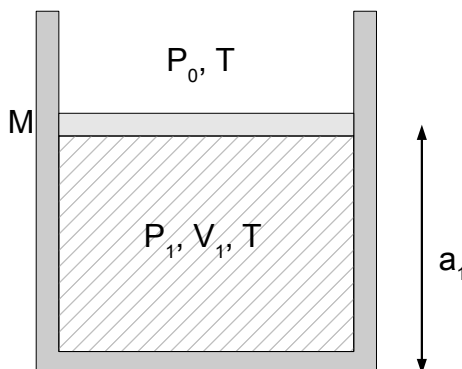


FIGURE 13 – Etat initial du système

On notera P_0 la pression atmosphérique et on assimilera l’azote à un gaz parfait diatomique.

1. En étudiant l’équilibre du piston, donner l’expression de la pression P_1 à l’intérieur du cylindre en fonction de P_0 , M , S , et l’accélération de la pesanteur g .

On ajoute dorénavant une surcharge de masse m sur le piston (fig.14).

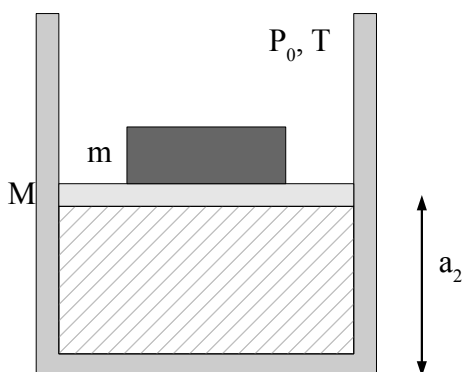


FIGURE 14 – Etat initial du système

2. On suppose dans cette question que le nouvel équilibre mécanique est atteint avant que tout échange de chaleur n’ait eu lieu avec l’extérieur.
 - 2.1 Exprimer la pression P_2 dans le cylindre en fonction de P_0 , M , m , S et g .
 - 2.2 Déterminer le travail des forces de pression atmosphérique exercées sur le piston et transmises intégralement au gaz en fonction de P_0 et de la variation de volume du gaz dans le cylindre.
 - 2.3 Déterminer le travail de pesanteur de l’ensemble $\{\text{piston} + \text{surcharge}\}$ en fonction de M , m , S et g et de la variation de volume du gaz dans le cylindre.
 - 2.4 En appelant T_2 la température juste après l’équilibre mécanique et avant tout échange thermique, appliquer le premier principe de la thermodynamique au système fermé du gaz parfait et exprimer la nouvelle hauteur du piston a_2 en fonction de a_1 , C_v , T_2 , T , P_2 et S .

- 2.5 En déduire alors a_2 en fonction de a_1 , γ , P_1 et P_2 .
3. On suppose maintenant que l’équilibre thermique s’est établi avec l’extérieur.
Exprimer la pression P_3 à l’intérieur du cylindre en fonction de P_0 , M , m , S et g .
Exprimer ensuite la nouvelle position d’équilibre du piston a_3 en fonction de a_1 , P_1 et P_3 , puis en fonction de a_1 , P_0 , M , m , S et g .
4. Quelle est la relation entre la quantité de chaleur Q et le travail W mis en jeu lors de l’ensemble de la transformation subie par le gaz ?
Donner l’expression du travail W . En déduire l’expression de la quantité de chaleur Q en fonction de P_3 , a_3 , a_1 et S , puis en fonction de n , R , T , P_0 , M , m , S et g , toujours sur l’ensemble de la transformation.
5. On souhaite ici calculer les variations d’entropie sur l’ensemble de la transformation.
- 5.1 L’atmosphère extérieure ayant en permanence une température égale à T , quel nom peut-on lui donner ? En déduire l’expression de l’entropie reçue par l’extérieur. Exprimer la variation d’entropie de l’extérieur ΔS_{ext} en fonction de n , R , M , m , g , P_0 et S .
- 5.2 Quelle est l’entropie reçue par le gaz parfait dans le cylindre ? En utilisant la variation d’entropie d’un gaz parfait, exprimer la variation d’entropie totale du gaz parfait dans le cylindre ΔS_{gaz} en fonction de n , R , M , m , g , P_0 et S .
- 5.3 En déduire la variation d’entropie de l’univers $\Delta S = \Delta S_{ext} + \Delta S_{gaz}$.
En posant $x(m) = \frac{mg}{Mg + P_0S}$, montrer que : $\Delta S = nR(x - \ln(1 + x))$.
- 5.4 La transformation est-elle réversible ? Justifier la réponse.
6. On veut rendre cette fois-ci la transformation quasi-statique, en ajoutant la surcharge de masse m progressivement : on dépose successivement p masses identiques μ très petites, en attendant à chaque fois que les équilibres thermique et mécanique s’établissent avant d’ajouter la petite masse suivante. On passe ainsi par une suite d’états d’équilibre thermodynamique. Lorsqu’on dépose la $j^{ième}$ masse μ , $j - 1$ masses μ sont déjà sur le piston. On posera $x_j(\mu) = \frac{\mu g}{(M + (j - 1)\mu)g + P_0S}$ et on notera que si p est grand alors $x_j(\mu) \ll 1$.
- 6.1 Exprimer la variation d’entropie de l’univers ΔS_j correspondant à l’ajout de la $j^{ième}$ petite masse μ , alors que $j - 1$ masses sont déjà posées. Faire un développement limité au second ordre de ΔS_j sur la variable $x_j(\mu)$.
- 6.2 Exprimer sous la forme d’une somme la variation d’entropie de l’univers correspondant à l’ajout de toutes les petites masses.
En remarquant que $x_j(\mu) \leq x(\mu)$, montrer que l’on peut majorer la variation totale d’entropie de l’univers par $\frac{nR}{2}x(m)x(\mu)$.
- 6.3 Rend-on la transformation réversible en travaillant de façon quasi statique ?