



CONCOURS BLANC – PHYSIQUE – CORRIGÉ

D.Malka – MPSI 2019-2020 – Lycée Jeanne d'Albret

20.05.2020

Problème 1 – Étude du mouvement d'un satellite

1. Analyse qualitative

$$1.1 \quad \vec{F} = -\frac{kMm}{r^2}\vec{e}_r$$

$$[k] = [M]^{-1}[L][T]^{-2}$$

Le mouvement étudié est un mouvement à force centrale de centre O donc d'après le théorème du moment cinétique, le moment cinétique du satellite par rapport au centre O de la Terre se conserve.

- 1.2 Le référentiel géocentrique est défini par le repère d'espace de centre O (centre de masse de la Terre) dont les axes sont à chaque instant parallèle aux axes du référentiel de Copernic (pointant vers des étoiles « fixes » lointaines).

Ce référentiel est non solidaire du mouvement de rotation propre de la Terre.

Le référentiel de Copernic est, avec une excellente approximation, un référentiel galiléen.

Le référentiel est en translation elliptique par rapport au référentiel de Copernic, galiléen, donc il n'est pas rigoureusement galiléen.

- 1.3 Energie potentielle d'interaction gravitationnelle :

$$Ep(z) = -\frac{kMm}{R+z}$$

L'unique force \vec{F} s'exerçant sur le satellite est conservative donc l'énergie mécanique se conserve.

Etat de diffusion : le système peut s'éloigner indéfiniment du centre de force.

Etat lié : la distance entre le système et le centre de force est bornée.

- 1.4 La hauteur de l'atmosphère est de l'ordre de quelques dizaines de km. Les frottements atmosphériques dissipent l'énergie mécanique cinétique du système en énergie thermique. Or, pour un mouvement circulaire, $\Delta E_m = \frac{1}{2}\Delta E_p$ donc l'énergie potentielle et donc l'altitude du satellite diminue. $\Delta E_c = -\Delta E_m$ donc E_c augmente et par suite v augmente!

2. Etude de la trajectoire circulaire du satellite

- 2.1 Le mouvement est un mouvement à force centrale de centre O donc le moment cinétique par rapport à O se conserve. Il vaut $\vec{L}(t=0)$ à chaque instant. Si $\vec{L}(t=0) = 0$, le mouvement est rectiligne, si $\vec{L}(t=0) \neq 0$, le mouvement de G a lieu dans le plan orthogonal à $\vec{L}(t=0)$.

- 2.2 En coordonnées polaires :

$$\vec{v}(G) = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$$

On dérive par rapport au temps :

$$\vec{a}(G) = \ddot{r}\vec{e}_r + \dot{r}\dot{\theta}\vec{e}_\theta + 2\dot{r}\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - r\dot{\theta}^2\vec{e}_r$$

$$\vec{a}(G) = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + \frac{1}{r}(2r\dot{r}\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta})\vec{e}_\theta$$

$$\vec{a}(G) = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + \frac{1}{r}(2r\dot{r}\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta})\vec{e}_\theta$$

$$\vec{a} = \left(\frac{d^2r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right) \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{d\theta}{dt} \right) \vec{e}_\theta$$

Equations du mouvement :

$$\begin{cases} m \frac{d^2r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = -\frac{kMm}{r^2} \\ m \frac{1}{r} \frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{d\theta}{dt} \right) = 0 \end{cases}$$

La première équation est l’équation du mouvement proprement dite, la deuxième traduit la conservation du moment cinétique du système au cours du mouvement. On peut la réécrire $C = r\dot{\theta}^2$

2.3 Avec $r = r_0 = cste$ et $\dot{\theta} = \frac{C}{r_0^2}$ la vitesse \vec{v} du satellite s’écrit :

$$\vec{v} = \frac{C}{r_0} \vec{e}_\theta$$

Donc le mouvement est uniforme.

De plus $C^2 = kMr_0$ donc $v = \sqrt{\frac{kM}{r_0}}$

La vitesse angulaire vaut : $\omega_0 = \frac{1}{r_0} \sqrt{\frac{kM}{r_0}}$

2.4 Application numérique :

- la période de révolution $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 5817s \approx 1h37min$,
- l’énergie mécanique $E_m = -\frac{kMm}{2r_0} = 28,6MJ$,
- la constante $C = 5,3.10^{10} m^2.s^{-1}$.

2.5 On raisonne sur la figure 1

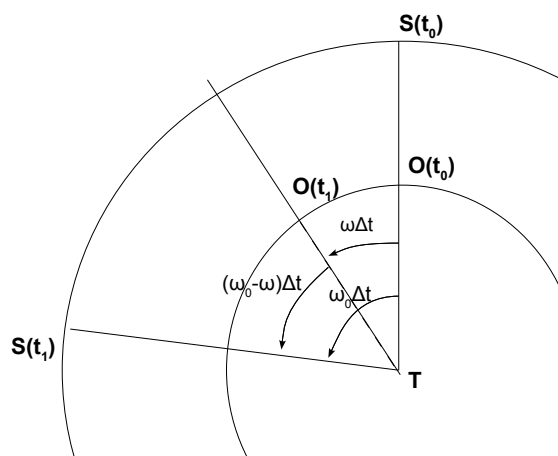


FIGURE 1 – Période relative du satellite dans le référentiel terrestre

$$\omega_r t = (\omega_0 - \omega)t + 2k\pi$$

Soit en dérivant :

$$\omega_r = \omega_0 - \omega$$

Donc

$$T_r = \frac{TT_0}{T - T_0}$$

A.N. : $T_r = 1 \text{ h } 43 \text{ min}$

3. Étude de la stabilité de la trajectoire circulaire

3.1

$$r = r_0(1 + \varepsilon)$$

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = \frac{-kM}{r^2}$$

$$\ddot{r} - \frac{C^2}{r^3} = \frac{-kM}{r^2}$$

$$\ddot{r} - \frac{C^2}{(r_0^3(1 + \varepsilon))^3} = \frac{-kM}{r_0^2(1 + \varepsilon)^2}$$

Au premier ordre en ε :

$$\ddot{\varepsilon} - \frac{C^2}{r_0^4}(1 - 3\varepsilon) = \frac{-kM}{r_0^3}(1 - 2\varepsilon)$$

$$\ddot{\varepsilon} - \left(\frac{3C^2}{r_0^4} - \frac{3kM}{r_0^3} \right) \varepsilon = -\frac{kM}{r_0^4} + \frac{C^2}{r_0^3}$$

Le dernier terme est nulle et étant donné l’expression de C :

$$\ddot{\varepsilon} + \left(\frac{3C^2}{r_0^4} - \frac{2kM}{r_0^3} \right) \varepsilon = 0$$

3.2 On peut réécrire l’équation précédente :

$$\ddot{\varepsilon} + \omega_1^2 \varepsilon = 0$$

$$\omega_1^2 = \frac{v_0^2}{r_0^2} = \frac{kM}{r_0^3}$$

On reconnaît la pulsation de la trajectoire circulaire calculée pour le mouvement circulaire.

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \cos \omega_1 t$$

avec un choix judicieux de l’origine des temps.

La trajectoire du satellite est stable, au sens où le rayon oscille entre $r_0 + \varepsilon_0$ et $r_0 - \varepsilon_0$ autour de sa valeur initiale mais la trajectoire n’est plus circulaire.

$$3.3 \quad \dot{\theta} = \frac{C}{r^2} = \frac{C}{r_0^2}(1 - 2\varepsilon) = -2\frac{v_0}{r_0}\varepsilon_0 \cos(\omega_1 t)$$

Si $\varepsilon_0 = 0$ c’est-à-dire tant que n’a pas eu lieu une petite perturbation extérieure, alors $\dot{\theta} = \frac{v_0}{r_0}$. Le mouvement demeure évidemment circulaire uniforme.

3.4 Comme $\omega_1 = \omega_0$, la trajectoire exacte du satellite après perturbation d’amplitude ε_0 est une ellipse de grand axe $r_0 + 2\varepsilon_0$ et de foyer le centre de la Terre (Fig.2). Une telle perturbation existe toujours (attraction des autres astres telles que la Lune) et donc la trajectoire du satellite n’est jamais rigoureusement circulaire. Un moteur interne au satellite doit être prévu pour le ramener régulièrement sur son orbite.

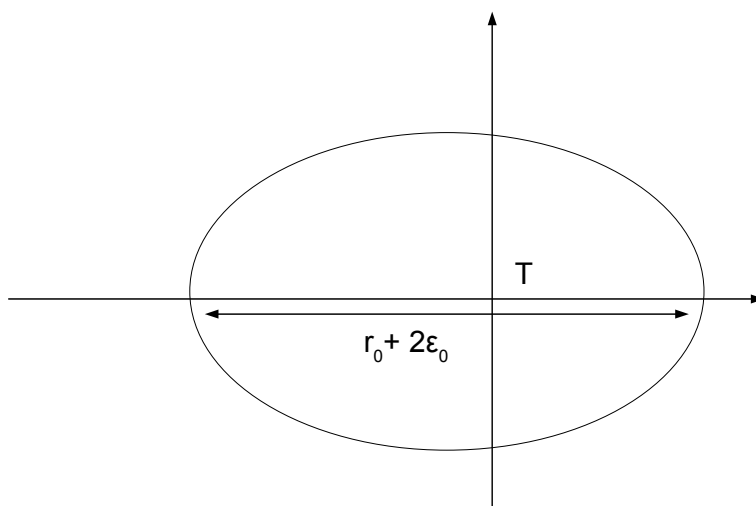


FIGURE 2 – Trajectoire perturbée du satellite

Problème 2 – Vibration d’un verre à pied

I - Analyse expérimentale des vibrations du verre

I.A – Analyse qualitative de l’enregistrement

1. Les modes propres montrent que l’onde de vibration du verre est confinée. Ces modes propres sont encore appelés *harmoniques* (*fundamental* pour l’harmonique $n = 1$).
2. La fréquence f du signal est égale à la fréquence du fondamental soit $f = 540 \text{ Hz}$ d’après le spectre.
3. L’onde se propage en faisant le tour du bord supérieur du verre. Au bout d’un tour, elle doit interférer constructivement avec elle-même. Pour le mode fondamental : $\lambda = \pi D$. Or $\lambda = \frac{c}{f}$ d’où $c = \pi D f$.
A.N. : $c \approx 200 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.
4. Fréquences des différents modes propres ? D’après le spectre : $f_1 \approx 540 \text{ Hz}$, $f_2 \approx 1080 \text{ Hz}$, $f_3 \approx 1630 \text{ Hz}$, $f_4 \approx 2180 \text{ Hz}$. Aux erreurs de lecture près, les fréquences propres du verre s’écrivent $f_n = n f_1$.
5. L’analyse spectrale représentant correctement le phénomène étudié à condition que :
 - la réponse du microphone soit linéaire : les fréquences restituées par le microphone sont alors bien celles de l’onde émise par le verre ;
 - le gain du microphone doit être constant sur la plage des fréquences enregistrées : les amplitudes relatives des différents modes sont alors fidèlement restituées.
6. L’analyse spectrale permet de déterminer, outre les fréquences propres de vibration du verre, son facteur de qualité.

I.B – Estimation du facteur de qualité Q

7. Théorème de la résultante cinétique appliqué à la masse en référentiel galiléen :

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0} \quad \text{avec} \quad \boxed{\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}} \quad \text{et} \quad \boxed{Q = \frac{m\omega_0}{\alpha}}$$

8. Le verre est modélisé par un oscillateur harmonique de pulsation propre ω_0 et de facteur de qualité, lié à l’amortissement, Q ? ω_0 se mesure en $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$, Q est sans dimension donc sans unité.

9. Vibration du verre dans le cadre du modèle de l’oscillateur harmonique.

Faible amortissement donc $Q \gg 1$ en particulier $Q > 1/2$ donc le régime libre est pseudo-périodique :

$$x(t) = \exp(-t/\tau)(a \cos \omega t + b \sin \omega t)$$

avec $\tau = \frac{2Q}{\omega_0}$ et $\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$.

Faible amortissement donc $Q \gg 1$ et donc $\omega \approx \omega_0$, soit :

$$x(t) = \exp(-t/\tau)(a \cos \omega_0 t + b \sin \omega_0 t)$$

Avec les conditions initiales $x(0) = 0$ et $\dot{x}(0) = V_0$, il vient :

$$a = 0 \quad b = \frac{V_0}{\omega_0}$$

Finalement :

$$x(t) = \frac{V_0}{\omega_0} \exp(-t/\tau) \sin \omega_0 t$$

Allure : fig.3.

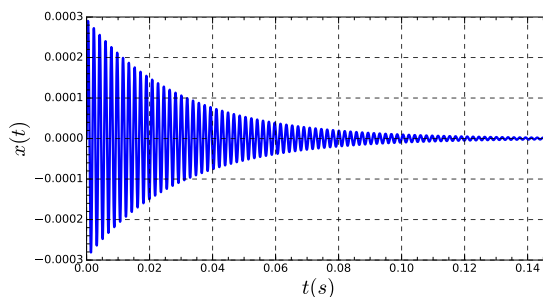


FIGURE 3 – Allure des vibrations du verre pour $f_0 = 540$ Hz et $Q = 50$

10. La modélisation reproduit bien une allure identique à l’enregistrement. Les enveloppes exponentiellement décroissantes valide la modélisation de la dissipation d’énergie par une force de frottement fluide.

11. Le régime libre avec un temps de relaxation $\tau = \frac{2\omega_0}{Q}$. D’après les spectres à $t = 1,0$ s et à $2,0$ s, l’amplitude du fondamental s’atténue d’un facteur 2 en $t_r = 1$ s donc :

$$\begin{aligned} \exp(-t_r/\tau) &= \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow \tau &= \frac{t_r}{\ln 2} \\ \Leftrightarrow \frac{2Q}{\omega_0} &= \frac{t_r}{\ln 2} \\ \Leftrightarrow Q &= \frac{\omega_0 t_r}{2 \ln 2} \end{aligned}$$

A.N. : $Q \approx 2,5 \times 10^3$.

Dans la suite de l’expérience, on va chercher à mettre en résonance le verre à l’aide d’une excitation sinusoïdale.

12. Le régime libre s’amortit en environ 5τ soit environ 5 s ici.

II Étude de la résonance en amplitude du verre en régime sinusoïdal forcé

II.A – Approche théorique

L'équation différentielle traduisant l'évolution temporelle de $x(t)$ est alors de la forme suivante, avec $\omega = 2\pi f$ la pulsation et ϕ la phase du signal acoustique délivré par le générateur basse fréquence :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = A \cos(\omega t + \phi)$$

En régime sinusoïdal forcé, la solution est de la forme $x(t) = X \cos(\omega t + \varphi)$. Comme en électrocinétique, on introduit la grandeur complexe associée $\underline{x}(t) = \underline{X} \exp(j\omega t)$ avec $j^2 = -1$.

13. \underline{X} est l'amplitude complexe associée au signal harmonique $x(t)$. Son argument est la phase (à l'origine) φ de $x(t)$ et son module est l'amplitude X de $x(t)$.
14. Par linéarité de l'équation différentielle, $\underline{x}(t)$ vérifie :

$$\begin{aligned} \frac{d^2\underline{x}}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{d\underline{x}}{dt} + \omega_0^2 \underline{x} &= A \exp(j\omega t + \phi) \\ \Leftrightarrow -\omega^2 \underline{X} + \frac{j\omega\omega_0}{Q} \underline{X} + \omega_0^2 \underline{X} &= A \exp(j\phi) \\ \Leftrightarrow \underline{X} &= \frac{A \exp(j\phi)}{\omega_0^2 - \omega^2 + \frac{j\omega\omega_0}{Q}} \end{aligned}$$

On en déduit :

$$X = |\underline{X}| = \frac{A}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega\omega_0}{Q}\right)^2}}$$

15. Comportement asymptotique de X :

$$\begin{aligned} - \lim_{\omega \rightarrow 0} X &= \frac{A_0}{\omega_0^2} \\ - \lim_{\omega \rightarrow +\infty} X &= 0 \end{aligned}$$

Seul le graphe 2 vérifie simultanément ces deux limites.

16. Le système admet une résonance en amplitude s'il existe une pulsation ω_r telle que X est maximal. C'est le cas si $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$.
17. Pulsation de résonance ω_r ?

On pose $r = \omega/\omega_0$. Alors :

$$\begin{aligned} X &= \frac{A/\omega_0^2}{\sqrt{(1-r^2)^2 + \left(\frac{r}{Q}\right)^2}} \\ &= \frac{A/\omega_0^2}{\sqrt{P(r)}} \quad \text{avec} \quad P(r) = (1-r^2)^2 + \frac{r^2}{Q^2} \end{aligned}$$

X admet maximum ssi P admet un minimum.

$$P'(r) = 4r(1-r^2) + \frac{r}{Q}$$

$$P'(r) > 0 \Leftrightarrow 1-r^2 + \frac{r}{2Q} > 0$$

En posant le discriminant, etc, et sachant que $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$, on trouve :

$$P'(r) > 0 \Leftrightarrow r > \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$$

Soit, une résonance pour $\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$.

Dans la suite, on suppose $Q \gg Q_0$.

18. $Q \gg Q_0 \Rightarrow \omega_r \approx \omega_0$.

19. Amplitude X_r à la résonance :

$$X_r \approx \frac{A}{\sqrt{\left(\frac{\omega_0^4}{Q}\right)^2}}$$

Soit :

$$X_r \approx Q \frac{A}{\omega_0^2}$$

L’amplitude de vibration est Q fois plus importante que celle de l’excitation.

20. Par définition, les pulsations de coupure ω_1 et ω_2 ($\omega_1 < \omega_2$) du module de \underline{X} vérifie :

$$X(\omega_{1,2}) = \frac{X_r}{\sqrt{2}}$$

On montre que la largeur de la bande passante vérifie :

$$\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$$

II.B – Tracé expérimental

21. Voir figure 4.

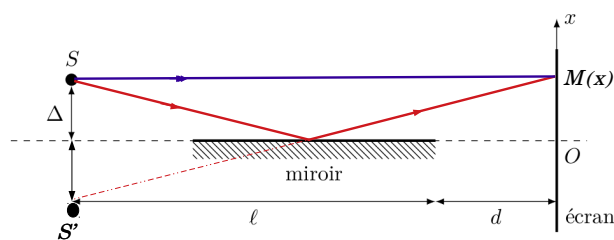


FIGURE 4 – Interférences à l’aide du miroir

22. On considère un point M d’abscisse x , situé sur l’écran dans le champ d’interférence. En supposant que $\Delta \ll l + d$ et $|x| \ll l + d$, on montre que la différence de marche δ entre les deux rayons représentés à la question précédente s’écrit :

$$\delta = \frac{2\Delta x}{d+l} + \frac{\lambda}{2}$$

Expression de l’interfrange i . L’interfrange est la distance entre deux franges brillantes sur l’écran () interférence constructives. Condition d’interférences constructives entre les deux rayons lumineux :

$$\Delta\psi = p \times 2\pi, p \in \mathbb{Z}$$

Avec $\Delta\psi = 2\pi\frac{\delta}{\lambda}$, il vient :

$$\delta = p\lambda$$

Soit :

$$x_p = \frac{\lambda(d+l)}{2\Delta} \left(p - \frac{1}{2} \right)$$

L’interfrange se calcul comme $x_{p+1} - x_p$ ce qui donne :

$$i = \frac{\lambda(l+d)}{2\Delta}$$

23. Le bord du verre est animé d’un mouvement de translation dans la direction de l’axe (Ox), d’équation $x_m(t) = X \cos(\omega t + \varphi)$. La distance de la source au miroir devient donc $\Delta - x_m(t)$ et l’interfrange i de la figure d’interférences devient :

$$i(t) = \frac{\lambda(l+d)}{2(\Delta - X \cos(\omega t + \varphi))}$$

24. Exprimons X , amplitude des oscillations, en fonction de d , l , λ , i_{\min} et i_{\max} .

$$i_{\min} = \frac{\lambda(l+d)}{2(\Delta + X)} \quad i_{\max} = \frac{\lambda(l+d)}{2(\Delta - X)}$$

D’où, en faisant la différence des inverses :

$$X = \frac{\lambda(d+l)}{4} \left(\frac{1}{i_{\min}} - \frac{1}{i_{\max}} \right)$$

25. L’interfrange varie à la même fréquence que la vibration du verre soit 540 Hz pour le mode fondamental. Comme la persistance rétinienne est de 0,1 s, cette variation est impossible à suivre à l’œil nu.
26. La fréquence du stroboscope doit être un sous-multiple de la fréquence f d’oscillation de i soit :

$$f = kf_i, k \in \mathbb{N}$$

27. Une fois l’immobilité apparente réalisée sur l’image, l’interfrange s’écrit :

$$i(t_0) = \frac{\lambda(l+d)}{2(\Delta - X \cos(\omega t_0 + \varphi))}$$

Pour accéder, il faut donc pouvoir régler ou, à défaut, connaître φ .

28. Comme ω est fixée, l’amplitude X des oscillations aussi. On exploite la relation :

$$X = \frac{\lambda(d+l)}{4} \left(\frac{1}{i_{\min}} - \frac{1}{i_{\max}} \right)$$

On suppose :

- l’interfrange est minimale sur le cliché 2 ; sur la figure, on mesure $i_{\min} = 6,0 \text{ mm}$,
- l’interfrange est maximale sur le cliché 6 ; sur la figure, on mesure $i_{\max} = 12,5 \text{ mm}$.

Facteur d’échelle : $\alpha = \frac{100 \mu\text{m}}{48 \text{ mm}} = \frac{1}{480}$ d’où :

On suppose :

- l’interfrange est minimale sur le cliché 2 ; on mesure $i_{\min} = 12,5 \mu\text{m}$,
- l’interfrange est maximale sur le cliché 6 ; on mesure $i_{\max} = 26,0 \mu\text{m}$.

A.N. : $X = 3,3 \mu\text{m}$

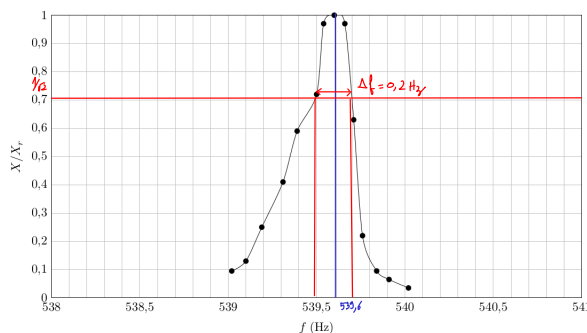


FIGURE 5 – Amplitude relative en fonction de la fréquence

29. Voir 5. Fréquence de résonance $f_r = 539,6 \text{ Hz}$ et le facteur de qualité $Q = \frac{f_0}{\Delta f} \approx 2700$ du verre dans son mode 1. Ces mesures sont accords avec celles réalisé en exploitant le régime libre.
30. Le générateur peut émettre autour de la fréquence de résonance $f_r = 539,6 \text{ Hz}$. Néanmoins, l'incertitude sur la fréquence $\delta f = 0,5\% f_r \approx 2,7 \text{ Hz}$ très supérieure à la largeur de la bande passante $\Delta f = 0,2 \text{ Hz}$ risque de rendre le réglable très délicat.

Problème 3 – Compression irréversible et réversible d’un gaz parfait

1. Système : piston de masse M
 Référentiel : \mathcal{R} supposé galiléen
 Bilan des forces s’exerçant sur le piston :

- poids $\vec{P} = -Mg\vec{e}_z$;
- force pressante du diazote $\vec{F}_1 = P_1 S \vec{e}_z$;
- force pressante de l’atmosphère $\vec{F}_0 = -P_0 S \vec{e}_z$;

A l’équilibre, $\vec{P} + \vec{F}_1 + \vec{F}_0 = \vec{0}$, soit :

$$P_1 = P_0 + \frac{Mg}{S}$$

2. On suppose dans cette question que le nouvel équilibre mécanique est atteint avant que tout échange de chaleur n’ait eu lieu avec l’extérieur.

2.1 Par un raisonnement analogue au précédent, on obtient :

$$P_2 = P_0 + \frac{(m + M)g}{S}$$

2.2 Système : n moles de diazote.

Le travail élémentaire des forces pressantes atmosphériques reçu par le gaz est $\delta W = -P_0 dV$ avec P_0 constante.

2.3 Système : { piston + surcharge }

$$\delta W(\vec{P}) = -(M + m)gdz = -(M + m)g \frac{dV}{S}$$

En intégrant entre V_1 et V_2 , on obtient :

$$W = (M + m)g \left(\frac{V_1}{S} - \frac{V_2}{S} \right)$$

Le travail reçu est bien positif.

2.4 T_2 : température atteinte par le gaz due à son échauffement lors de sa compression adiabatique.

Appliquons le premier principe au diazote au cours de cette compression : $\Delta U = W + Q$.

— la transformation est adiabatique donc $Q = 0$;

— pour le gaz parfait : $\Delta U = C_v(T_2 - T)$;

— on suppose que le travail reçu par les pistons des forces de pesanteur est intégralement transmis au gaz. Le travail total reçu s’écrit alors : $W = P_2(V_1 - V_2) = \frac{P_2}{S}(a_1 - a_2)$

On détermine alors a_1 :

$$a_2 = a_1 - \frac{C_v(T_2 - T)}{P_2 S}$$

On a bien $a_1 < a_2$ (compression).

2.5 $C_v = \frac{nR}{\gamma - 1}$ et T_2 est fonction de a_2

$$P_2 S a_2 = nRT_2 \Rightarrow T_2 = \frac{P_2 S a_2}{nR}$$

$$P_1 S a_1 = nRT \Rightarrow T = \frac{P_1 S a_1}{nR}$$

$$a_2 = a_1 - \frac{a_2}{\gamma - 1} + \frac{P_1}{P_2} \frac{1}{\gamma - 1} a_1$$

$$a_2 = \frac{1}{\gamma} \left(\gamma - 1 + \frac{P_1}{P_2} \right) a_1$$

3. A l’équilibre mécanique, $P_3 = P_{ext} = P_2 = P_0 + \frac{(m + M)g}{S}$. La chute de pression due au refroidissement du gaz est compensée par une réduction de son volume au cours de ce refroidissement.

Nouvelle position d’équilibre a_3 .

$$P_3 S a_3 = nRT \quad \text{et} \quad P_1 S a_1 = nRT$$

donc :

$$a_3 = \frac{P_1}{P_3} a_1$$

or $\frac{P_1}{P_3} = \frac{Mg + P_0 S}{(m + M)g + P_0 S}$, donc :

$$a_3 = \frac{Mg + P_0 S}{(m + M)g + P_0 S} a_1$$

On a bien $a_3 < a_1$.

4. Sur l’ensemble de la transformation : $\Delta T = 0$ ce qui impose $\Delta U = 0$ pour un gaz parfait. D’après le premier principe appliqué au gaz sur l’ensemble de la transformation : $Q = -W$. La transformation est monobare donc : $W = P_2(V_1 - V_3) = P_3 S(a_1 - a_3)$ donc $Q = P_3 S(a_3 - a_1) < 0$ (le gaz perd de la chaleur).

Or $a_1 = \frac{P_3}{P_1} a_3$ et $a_3 = \frac{nRT}{P_3 S}$ donc $Q = P_3 S a_3 \left(1 - \frac{P_3}{P_1}\right)$. Finalement :

$$Q = nRT \left(1 - \frac{(m + M)g + P_0 S}{Mg + P_0 S}\right)$$

5. On souhaite ici calculer la variations d’entropie sur l’ensemble de la transformation.

5.1 L’atmosphère extérieure conserve une température constante donc on peut la modéliser par un thermostat.

L’entropie reçue par l’extérieur vaut alors : $S_{ext}^r = \frac{-Q}{T}$ où Q est le transfert thermique reçu par le système.

En faisant l’hypothèse que l’évolution du milieu extérieur est aussi réversible concernant le travail alors :

$$\Delta S_{ext} = S_{ext}^r = nR \left(\frac{(m+M)g + P_0S}{Mg + P_0S} - 1 \right)$$

5.2 Entropie reçue par le gaz parfait dans le cylindre :

$$S^r = -S_{ext}^r = nR \left(1 - \frac{(m+M)g + P_0S}{Mg + P_0S} \right)$$

Variation d’entropie totale du gaz parfait :

$$\Delta S_{gaz} = C_v \ln\left(\frac{T_3}{T_1}\right) + nR \ln\left(\frac{V_3}{V_1}\right)$$

Or $T_1 = T_3 = T$ et $\frac{V_3}{V_1} = \frac{a_3}{a_1} = \frac{P_0S + Mg}{P_0S + (m+M)g}$, d’où :

$$\Delta S_{gaz} = nR \ln\left(\frac{P_0S + Mg}{P_0S + (m+M)g}\right)$$

5.3 L’univers est un système isolé donc :

$\Delta S = S^c$ entropie créée.

Par extensivité de l’entropie (atmosphère et gaz disjoints) :

$$\Delta S = \Delta S_{gaz} + \Delta S_{ext}$$

$$\Delta S = nR \ln\left(\frac{P_0S + Mg}{P_0S + (m+M)g}\right) + nR \left(\frac{(m+M)g + P_0S}{Mg + P_0S} - 1\right)$$

En posant $x(m) = \frac{mg}{Mg + P_0S}$, on a :

$$\Delta S = nR \ln\left(\frac{1}{1+x}\right) + nR \left(\frac{mg}{Mg + P_0S}\right)$$

soit :

$$\Delta S = nR(x - \ln(1+x))$$

5.4 $\forall x \in [0, +\infty]$, $x > \ln(1+x)$ donc $\Delta S \geq 0$: la transformation est irréversible si m est non nulle.

6. Transformation quasi-statique.

6.1 La transformation subie par le système entre les états $j-1$ et j est strictement analogue à la transformation traitée précédemment : masse initiale $M + (j-1)\mu$ et surcharge μ . On a donc :

$$\Delta S = nR(x_j - \ln(1+x_j))$$

Or $x_j \ll 1$ donc un développement limité à l’ordre 2 de cet expression donne :

$$\Delta S \approx nR \frac{x_j^2(\mu)}{2}$$

6.2 $\Delta S = \frac{nR}{2} \sum_{j=1}^p x_j^2(\mu)$ or $\forall j \in \mathcal{N}, x_j(\mu) \leq x(\mu)$, donc :

$$\Delta S \leq \frac{nR}{2} p x(\mu)^2$$

C’est à dire :

$$\Delta S \leq \frac{nR}{2} x(m)x(\mu)$$

6.3 Lorsque $p \mapsto \infty$, $x(\mu) \mapsto 0$ et donc $\frac{nR}{2} x(m)x(\mu) \mapsto 0$.

Finalement, $\Delta S \leq 0$ et d’après le second principe $\Delta S \geq 0$ donc $\Delta S = 0$: l’entropie créée au cours de la transformation est nulle donc la transformation est réversible.