Informatique - CN1

Résolution numérique d'équations sur les réels

D.Malka

MPSI 2019-2020

Sommaire

Sommaire

Équation sur les réels

Types d'équation que l'on peut-être amené à résoudre :

Équations algébriques

$$x^2 - 3x^3 + 1 = 2x$$

$$x^2 + y^2 - 6xy + 3x = 0$$

Équations transcendantes

$$\cos(x) = x$$

$$e^x(x + e^x) = 3x^2 + 2$$

Résolution numérique

Qu'est-ce qui justifie une résolution numérique donc approchée ?

- **Les solutions existent mais ne peuvent être écrites analytiquement.**
- **Il existe des solutions analytiques mais le calcul est fastidieux.**
- **On souhaite tester facilement l'influence d'un paramètre sur la solution d'une équation.**

Se ramener à la recherche du zéro d'une fonction

Écriture générale d'une équation

On peut toujours écrire une équation sous la forme : $f(x) = 0$

Exemple

En vue de sa résolution, l'équation : $e^x = x + 5$
sera écrite : $e^x - x - 5 = 0$
soit encore : $f(x) = 0 \quad \text{avec} \quad f(x) = e^x - x - 5$

Résoudre une équation algébrique ou transcendante

Résoudre une équation algébrique ou transcendante revient donc à rechercher le(s) zéro(s) d'une fonction.

Sommaire

Principe de la recherche dichotomique du zéro d'une fonction

On cherche une racine x de l'équation $f(x) = 0$.

Conditions d'application

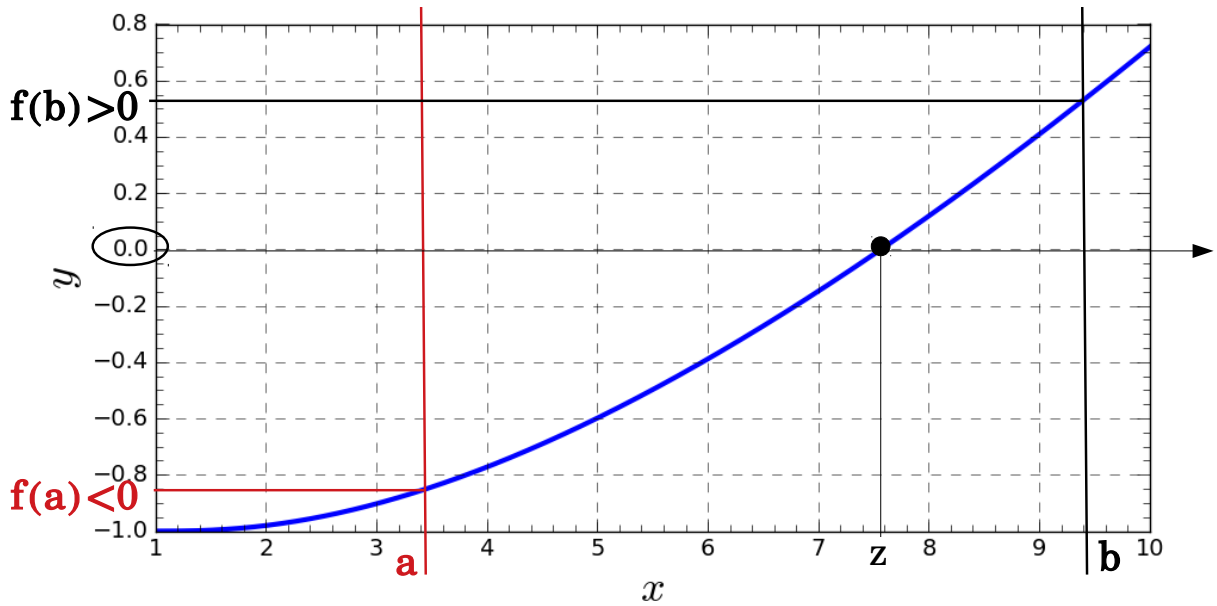
Soit $[a, b]$ l'intervalle de recherche.

- f continue sur $[a, b]$,
- f change de signe sur $[a, b]$ ($f(a)f(b) < 0$),
- théorème des valeurs intermédiaires $\Rightarrow$ existence d'au moins un zéro de f dans $[a, b]$.

Principe de la recherche dichotomique du zéro d'une fonction

Conditions d'application

Graphiquement :



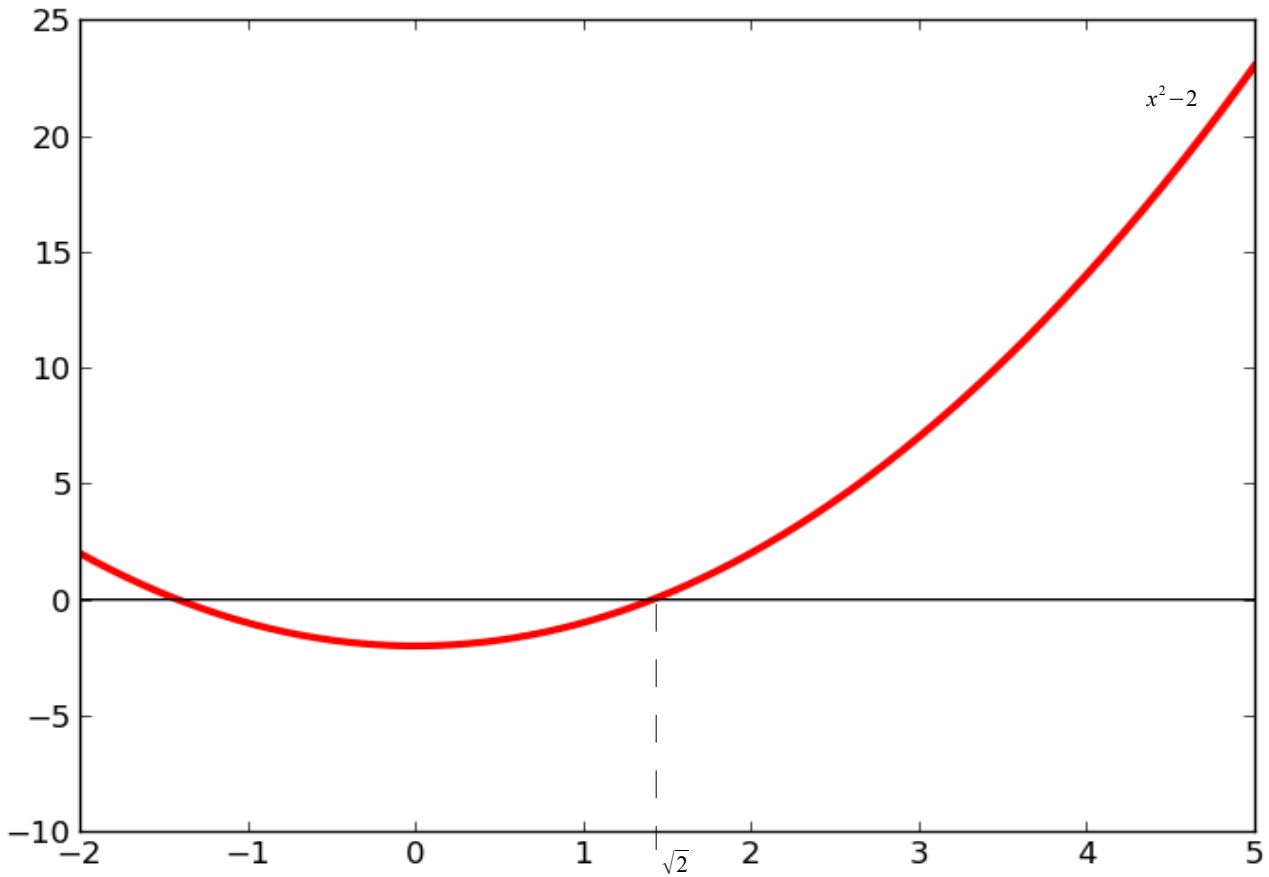
Principe de la recherche dichotomique du zéro d'une fonction

Algorithme

- On coupe en deux récursivement l'intervalle de recherche courant $[a_k, b_k]$ en maintenant l'invariant $f(a_k).f(b_k) < 0$,
- A chaque itération $x \in [a_k, b_k]$,
- Condition d'arrêt : soit ε l'erreur absolue maximale tolérée. On arrête l'algorithme à l'itération n vérifiant $b_n - a_n < \varepsilon$.
- La valeur $\tilde{x}$ renvoyée est alors telle que $|\tilde{x} - x| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

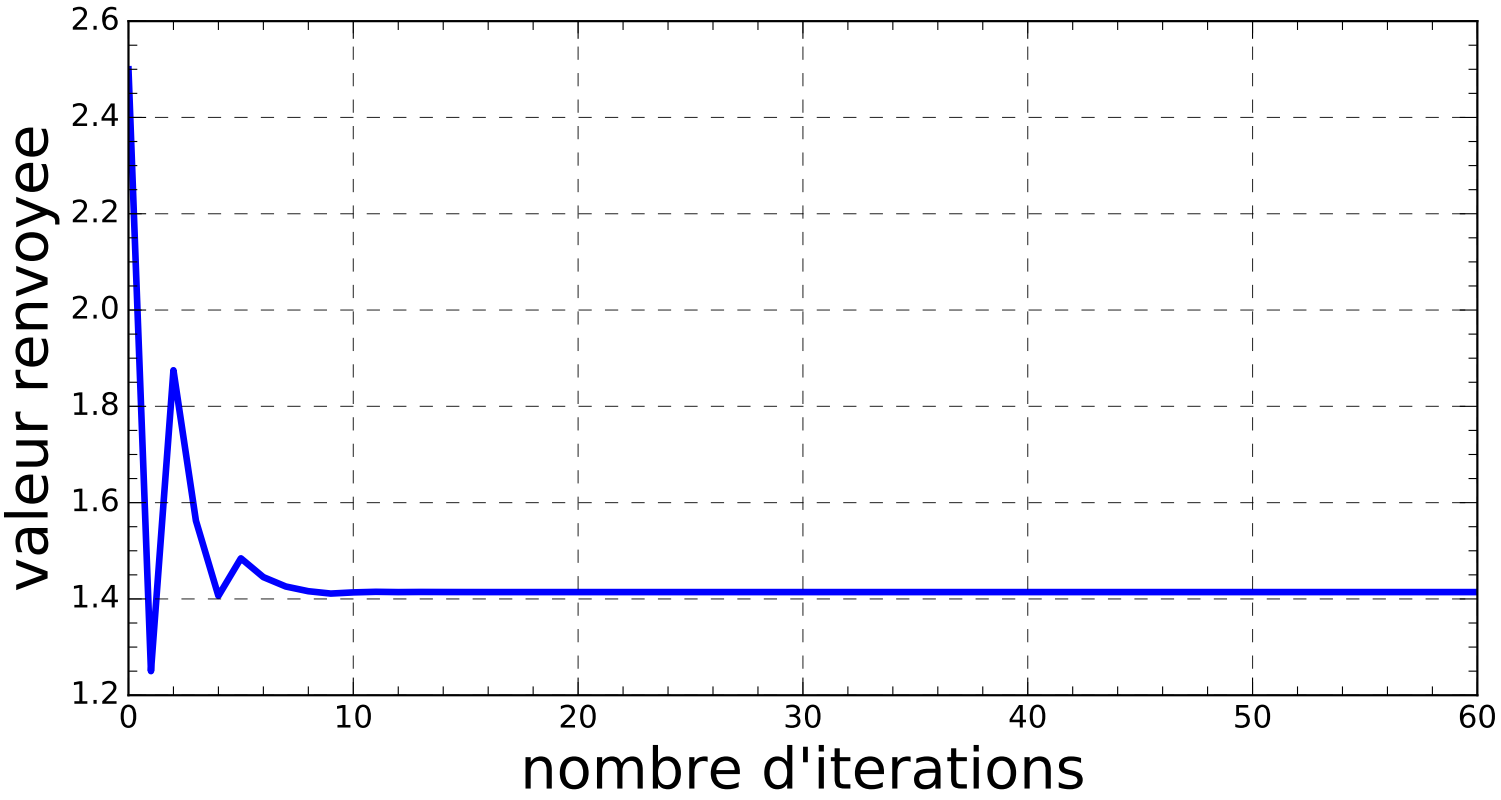
Principe de la recherche dichotomique du zéro d'une fonction

Représentation graphique



Principe de la recherche dichotomique du zéro d'une fonction

Graphiquement :



Algorithme (en Python)

Implémentation en Python :

```
1  def zero_dichotomique(f,a,b,epsilon):
2      assert f(a)*f(b)<0
3      g,d=a,b
4      while (d-g) > 2*epsilon:
5        m=(g+d)/2
6        if f(g)*f(m)<0: #m sup a la racine
7            d=m
8        elif f(g)*f(m)>0: #m inf a la racine
9            g=m
10       else: #coup de chance f(m)=0
11           return m
12     return (g+d)/2
```

Terminaison

Terminaison

Montrons que l'algorithme termine toujours.

- Soit $u_k = (b_k - a_k)$ largeur de l'intervalle de recherche du zéro x.
- Par récurrence, à l'itération k de l'algorithme $u_k = \dfrac{(b-a)}{2^k}$.
- Donc $u_k \searrow$ et $\lim_{k \to +\infty} u_k = 0$.
- Donc $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0} < 2\varepsilon$ ...
- ... i.e l'algorithme termine.

Correction

Preuve de la méthode dichotomique

- $f(a_k)f(b_k) < 0$ est un invariant de boucle (démo par récurrence)
- $\forall\, k$, $\exists$ un zéro de f dans $[a_k, b_k]$
- En particulier, en sortie de boucle (itération n) $x \in [a_n, b_n]$
- Or, alors $b_n - a_n < 2\varepsilon$ et $\tilde{x} = (b_n + a_n)/2$
- Et donc $\tilde{x} - \varepsilon/2 < x < \tilde{x} + \varepsilon/2$

Complexité

Complexité de la recherche dichotomique

La complexité de la méthode dichotomique est $O\left(log_2\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right)\right)$.

Donc le nombre de calculs augmente avec :

- **la précision ε désirée sur la valeur du 0**
- **la taille $b-a$ de l'intervalle de recherche initial.**

Complexité

Démonstration de la complexité

- **sortie de la boucle à l'itération** n**.**
- **donc** $(b_n - a_n) \leq 2\varepsilon$
- **donc à l'itération précédente** $(b_{n-1} - a_{n-1}) > 2\varepsilon$
- **avec** $(b_{n-1} - a_{n-1}) = \dfrac{b-a}{2^{n-1}}$
- **donc** $\dfrac{b-a}{2^n} > \varepsilon$
- **donc** $n < \log_2\left(\dfrac{b-a}{\varepsilon}\right)$
- **Donc une complexité au pire** $O\left(log_2\left(\dfrac{b-a}{\varepsilon}\right)\right)$

Convergence

Convergence globale

La convergence globale de la méthode dichotomique est assurée par le théorème des valeurs intermédiaires.

Convergence linéaire

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des valeurs réelles.

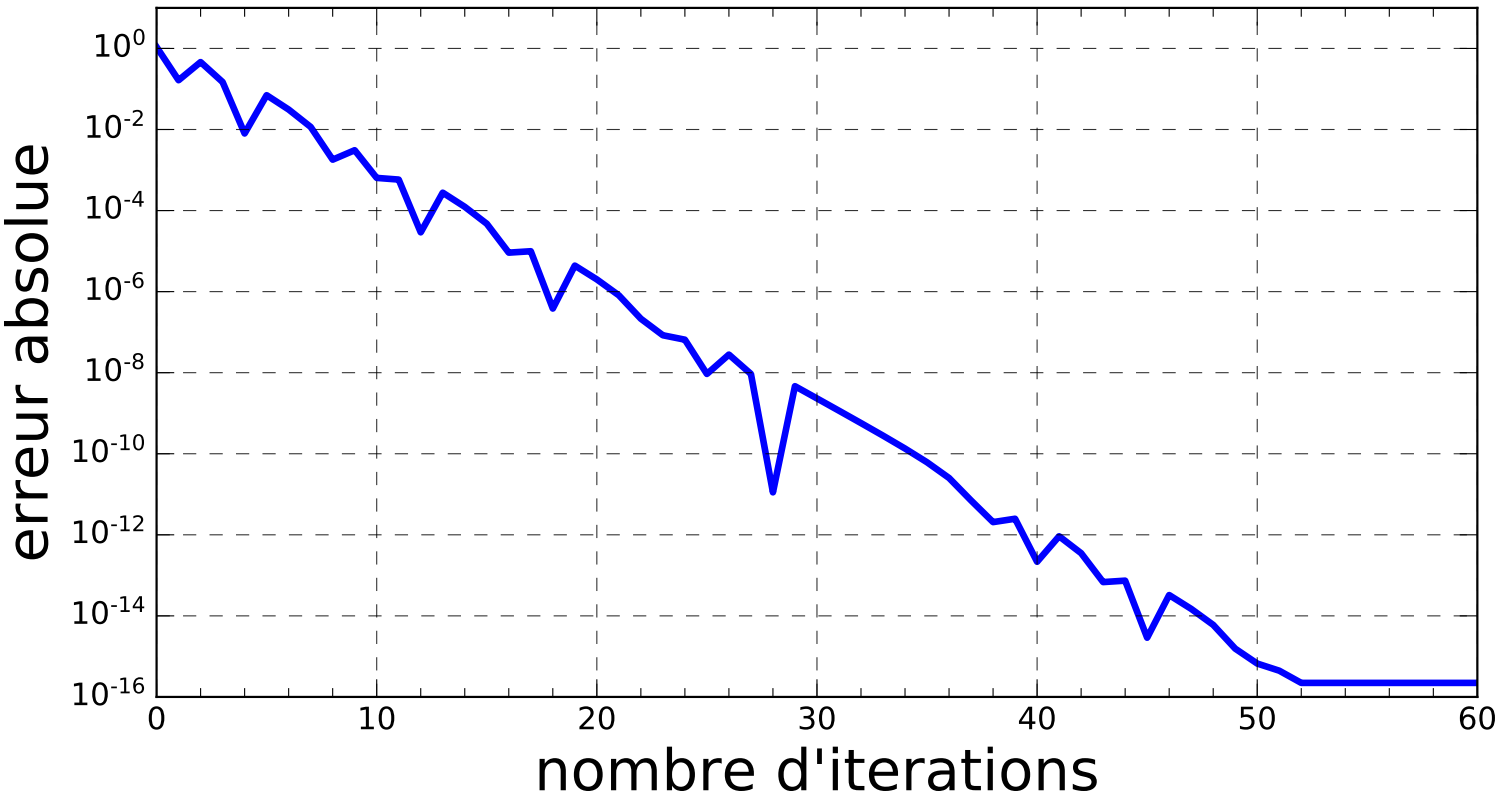
Si, à partir d'un certain rang n_0,

$$|\tilde{x}_{n+1} - x| < C|\tilde{x}_n - x| \quad \text{avec} \quad 0 < C < 1$$

la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est linéaire.

Convergence

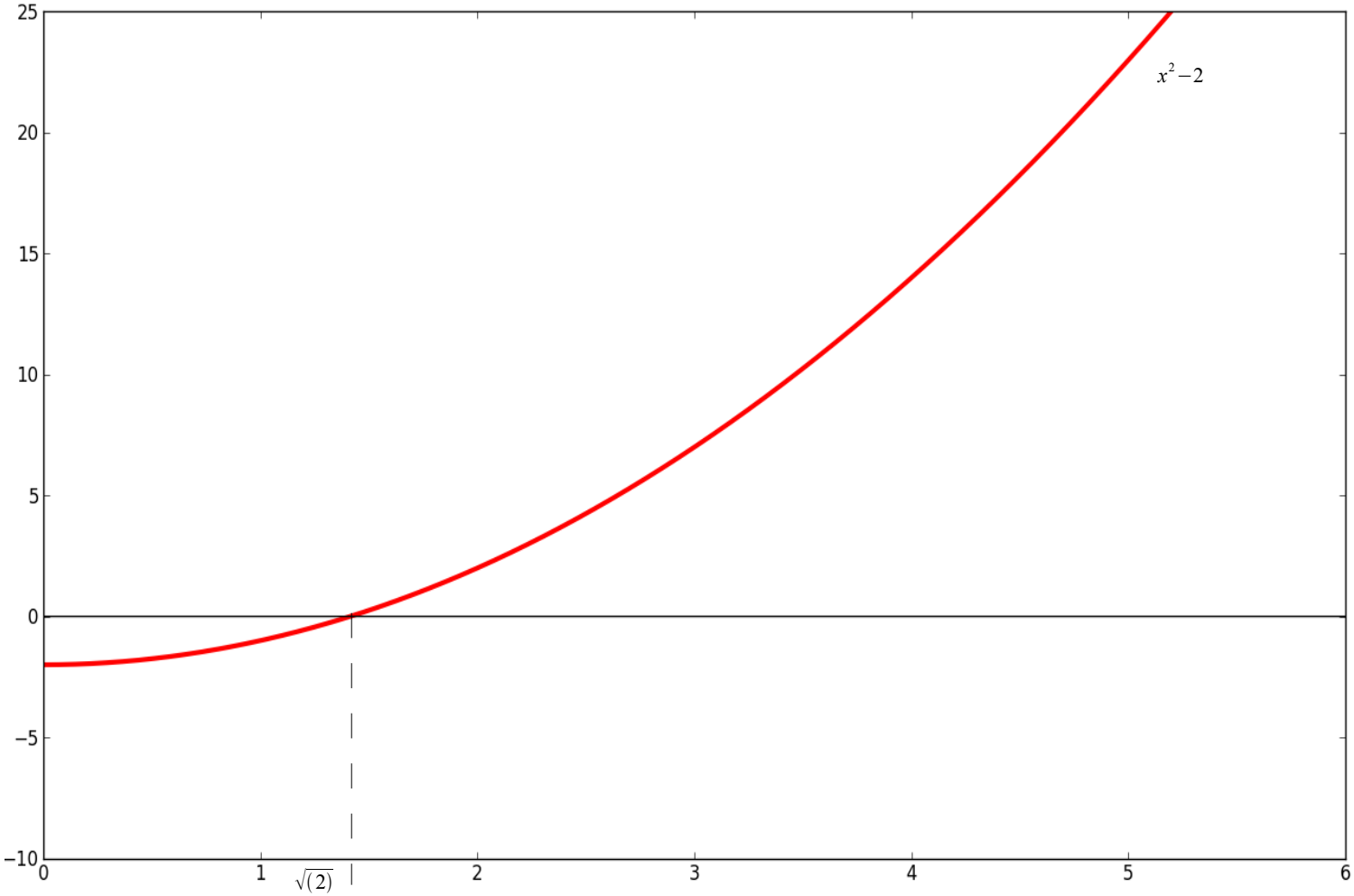
Graphiquement, sur l'exemple $f(x) = 0$ avec $f : x \to x^2 - 2$.



La méthode dichotomique (suite $\tilde{x}_k$ des zéros approchée de f) converge quasi-linéairement vers le zéro x de f. En pratique, on gagne un chiffre significatif à chaque itération.

Sommaire

Extraction de racine par la méthode de Newton



Extraction de racine par la méthode de Newton

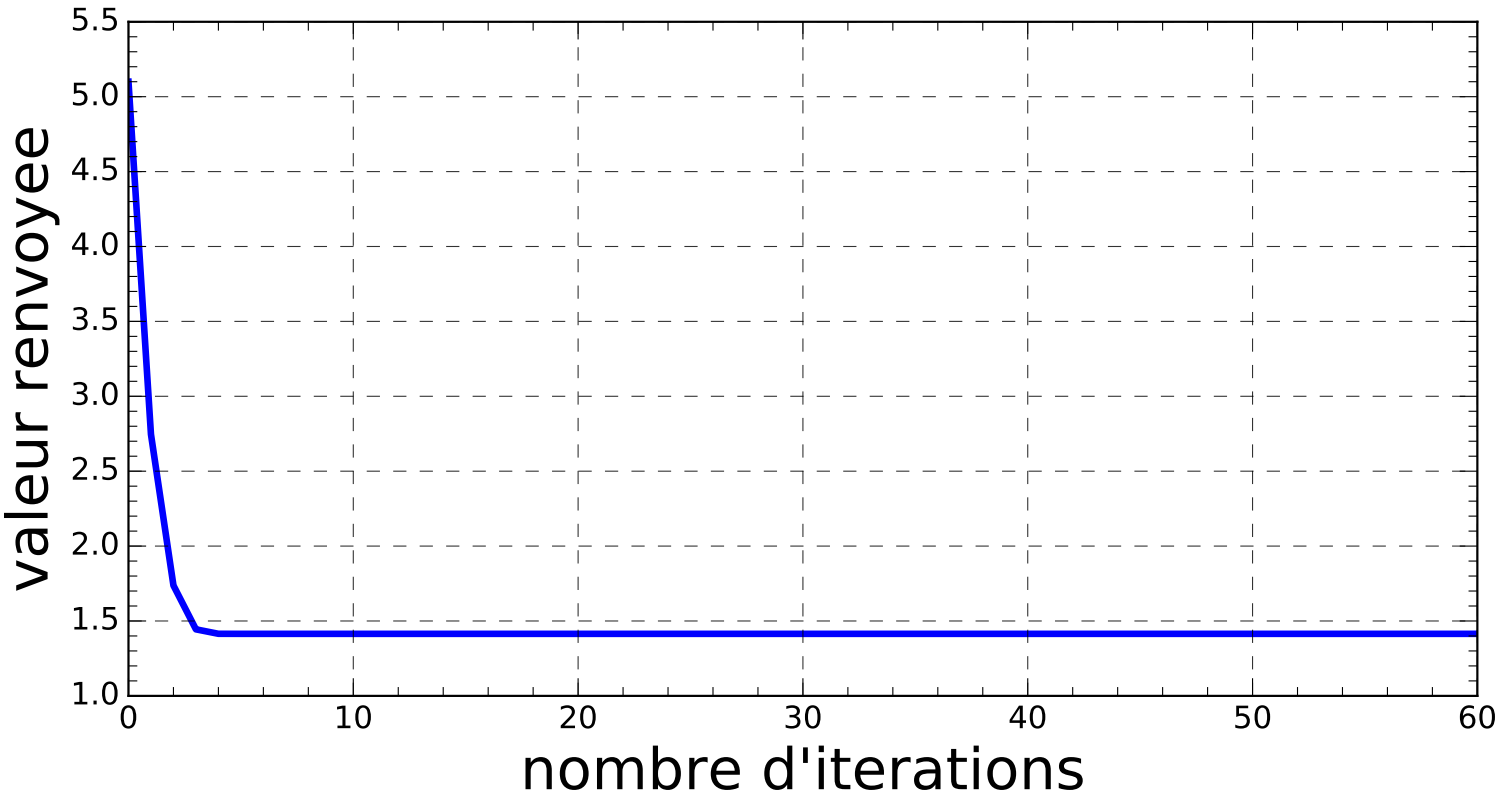
Si on note u_n les abscisses des points successifs où l'on évalue la tangente à la courbe, on a :

- $u_0 = 5$
- $u_1 = 2{,}7$
- $u_2 = 1{,}72$
- $u_3 = 1{,}441\,395\,349$
- $u_4 = 1{,}414\,469\,585\,9$

On sent que la suite u_n va converger vers $\sqrt{2} \approx 1{,}414\,213\,562\ldots$ qui est la racine positive de $x^2 - 2$.

Extraction de racine par la méthode de Newton

Graphiquement :



Extraction de racine par la méthode de Newton

Principe

- On approche f par la tangente à sa courbe en $\mathcal{C}_f$ en u_0 i.e :

$$f(x) = f(u_0) + f'(u_0)(x - u_0) + O(x - u_0)$$

- On approxime le zéro x de f par celui de sa tangente en u_0, noté u_1.
- On réitère la méthode à partir de u_1.
- On construit ainsi la suite $(u_n)_n$ des zéros des tangentes à $\mathcal{C}_f$ en u_{n-1}.
- On espère que la suite converge vers x et si oui en un temps raisonnable !

Conditions d'application

Nécessaires mais non suffisantes !

- Connaître f,
- Connaître f'.

Algorithme (en Python)

Implémentation en Python.

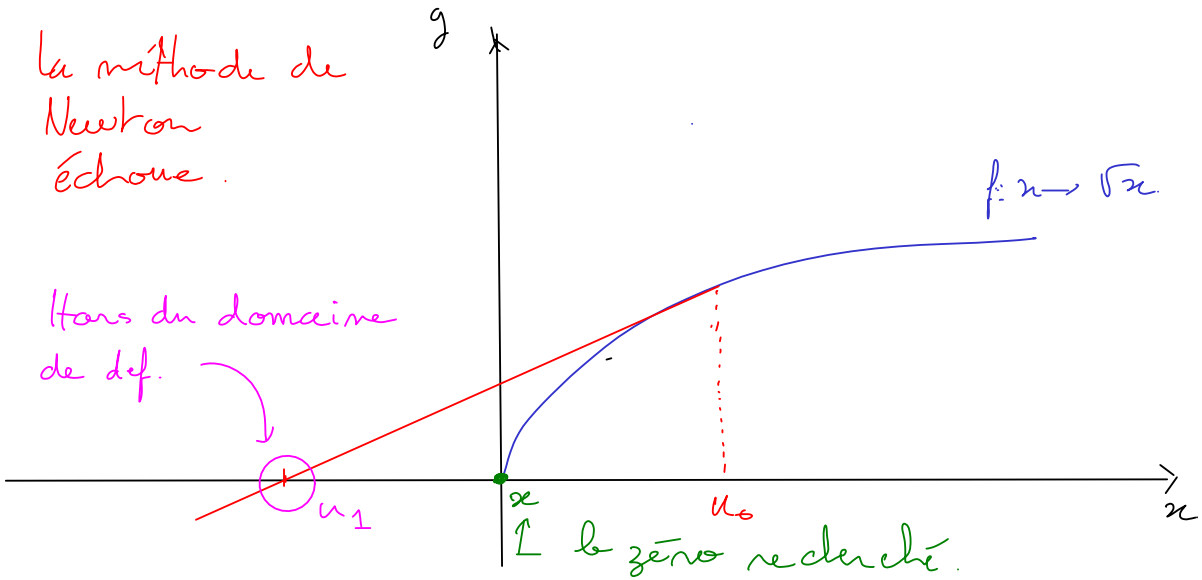
```
1  def newton(f,df,u_0,epsilon):
2      #f(u_n)=f'(u_n)*(u_n-u_{n+1})
3      u=u_0 #u contient u_n
4      v=u-f(u)/df(u) #v contient u_{n+1}
5      while fabs(u-v)>epsilon:
6          u=v
7          v=u-f(u)/df(u)
8      return v
```

Terminaison et correction

L'algorithme termine-t-il ? Si oui, est-il exact ?

La convergence globale de l'algorithme de Newton n'est pas assurée !

L'algorithme peut ne pas s'arrêter, diverger, renvoyer une valeur erronée, planter...



Terminaison et correction

Critère de convergence approximatif

C'est la concavité/convexité locale de la courbe qui détermine la convergence de la méthode. Si f est de classe $\mathcal{C}^2$ avec $f^{(2)}(x) \neq 0$ et que le point de départ u_0 est assez proche de x alors la concavité est constante au voisinage de x et la méthode de Newton converge vers x.

Ordre de convergence

Ordre de convergence

Soit u_n la suite des valeurs approchées du zéro x de f.

A partir d'un certain rang n_0,

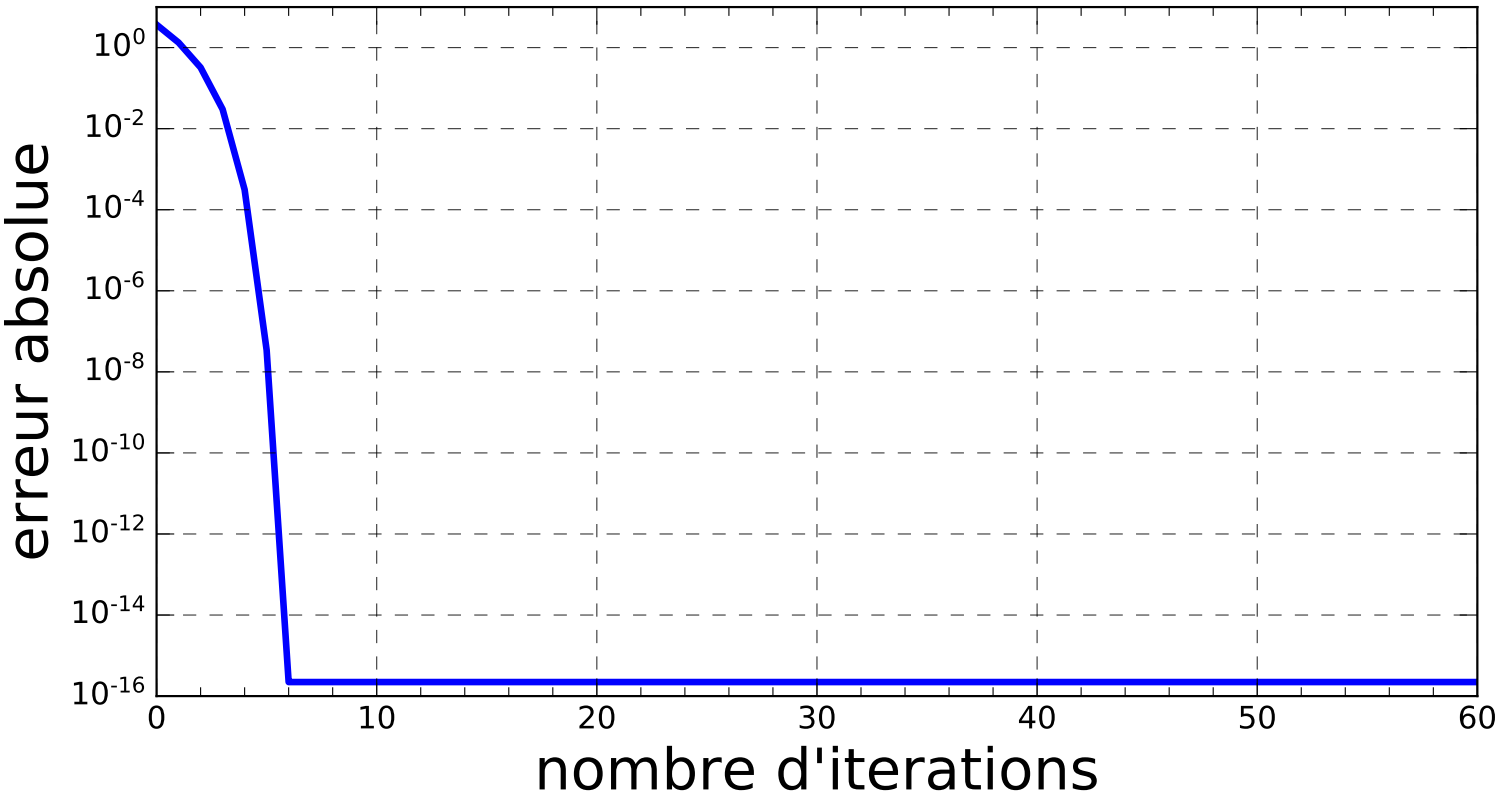
$$(u_{n+1} - x) < C(u_n - x)^2$$

La convergence de la méthode de Newton est quadratique.

En pratique le nombre p de chiffre significatifs double à chaque itération.

Ordre de convergence

Graphiquement, sur l'exemple $f(x) = 0$ avec $f : x \longrightarrow x^2 - 2$.



Sommaire

Newton vs dichotomie

Quelle méthode vaut-il mieux utiliser ? Cela dépend du critère prépondérant entre rapidité d'exécution et robustesse.

	Dichotomie	Newton
Robustesse	++	-
Rapidité	+	+++

Pour résumer, si la fonction est « sympathique » et qu'on a une bonne idée du zéro de la fonction on pourra appliquer la méthode de Newton en partant d'un point proche du zéro. La recherche du point proche du zéro pour la méthode de Newton peut se faire par la méthode dichotomique ! Sinon on utilise la méthode dichotomique.

Attention aussi aux erreurs numériques si on cherche une grande précision !

Sommaire

Fonction prédéfinies

Python dispose de bibliothèques de fonctions scientifiques prédéfinies :

- même principe que les fonctions « maison » précédentes,
- + optimisation.

On utilisera donc ces fonctions pour résoudre des problèmes.

Racines d'un polynôme

Le module `roots` de la bibliothèque `numpy` détermine les racines dans $\mathbb{C}$ d'un polynôme.

```
1 import numpy as np
2
3 P1=[1,0,-2]#x**2-2
4 racines1=np.roots(P1)
```

```
OUTPUT : [ 1.41421356 -1.41421356]
```

```
1 P2=[1,1,1]#x**2+x+1
2 racines2=np.roots(P2)
```

```
OUTPUT : [-0.5+0.8660254j -0.5-0.8660254j]
```

Dichotomie

Le module `optimize` de la bibliothèque `scipy` propose la fonction `bisect` qui implémente la méthode dichotomique.

```
1 f=lambda x: np.cos(x)
2 x0=op.bisect(f,0,np.pi,xtol=0.01)
```

`OUTPUT : 1.5707963268 soit` $\frac{\pi}{2}$

```
1 f=lambda x: np.cos(x)
2 x0=op.bisect(f,0,9*np.pi)
```

`OUTPUT : 20.35203522483 soit` $\frac{13\pi}{2}$

Méthode de Newton

Le module `optimize` de la bibliothèque `scipy` propose la fonction `newton` qui implémente la méthode de Newton.

```
1 f=lambda x: np.cos(x)#f
2 df=lambda x: -np.sin(x)#f'
3
4 x0=op.newton(f,np.pi/3,df)
```

`OUTPUT : 1.57079632679 soit` $\frac{\pi}{2}$

```
1 x0=op.newton(f,np.pi/100,df)
```

`OUTPUT : 32.9867228627 soit` $\frac{21\pi}{2}$

Méthode de Newton

Sans rentrer la dérivée (méthode de la sécante !) :

```
1 x0=op.newton(f,np.pi/3)
```

OUTPUT : 1.57079632679 soit $\frac{\pi}{2}$. Aussi précis qu'avec la dérivée.

```
1 x0=op.newton(f,np.pi/100)
```

```
OUTPUT : raise RuntimeError(msg)
RuntimeError: Failed to converge after 50 iterations, value is
17603867.0337
```

Méthode de Newton

Le module `optimize` de la bibliothèque `scipy` propose la fonction `fsolve` qui recherche les zéros d'une fonction scalaire ou vectorielle.

```
1 import numpy as np
2 import scipy.optimize as op
3
4 f=lambda (x,y): (x+y**2,1-y+x*y)#f
5 x0=op.fsolve(f,(0,0))
```

```
OUTPUT : [-0.356557123 0.6823278 ]
```