Informatique - CN2

Intégration numérique

D.Malka

MPSI 2018-2019

Sommaire

Sommaire

Intégration d'une fonction sur un intervalle

Le but de ce chapitre est d'aborder le calcul numérique de l'intégrale d'une fonction f sur un domaine fini délimité par ses bornes a et b :

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

Pourquoi une intégration numérique ?

- calcul analytique fastidieux
- expression exacte coûteuse
- l'intégrale n'admet pas d'expression analytique

Exemple d'intégrale non exprimable analytiquement

$$\mathrm{Erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} = \int_0^x e^{-u^2}\mathrm{d}u$$

Principe d'une intégration numérique

Il existe différentes méthodes d'intégration numériques (Newton-Cotes, Legendre-Gauss, Monte-Carlo...). Nous nous intéressons à deux avatars de la méthode de Newton-Cotes composite : la *méthode des rectangles* et *la méthode des trapèzes*.

Principe de la méthode de Newton-Cotes composites

Soit $J = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.
On calcule une valeur approchée $\widetilde{J}$ de J en remplaçant la fonction f par une approximation $\tilde{f}$ puis on intègre cette fonction :

$$J \approx \widetilde{J} \int_a^b \tilde{f}(x)\mathrm{d}x$$

Sommaire

Principe de la méthode des rectangles

On décompose l'intervalle $[a, b]$ en N intervalles I_k de longueur h : $[a, a+h]$, $[a+h, a+2h]$, ..., $[a+kh, a+(k+1)h]$, ... $[b-h, b]$.

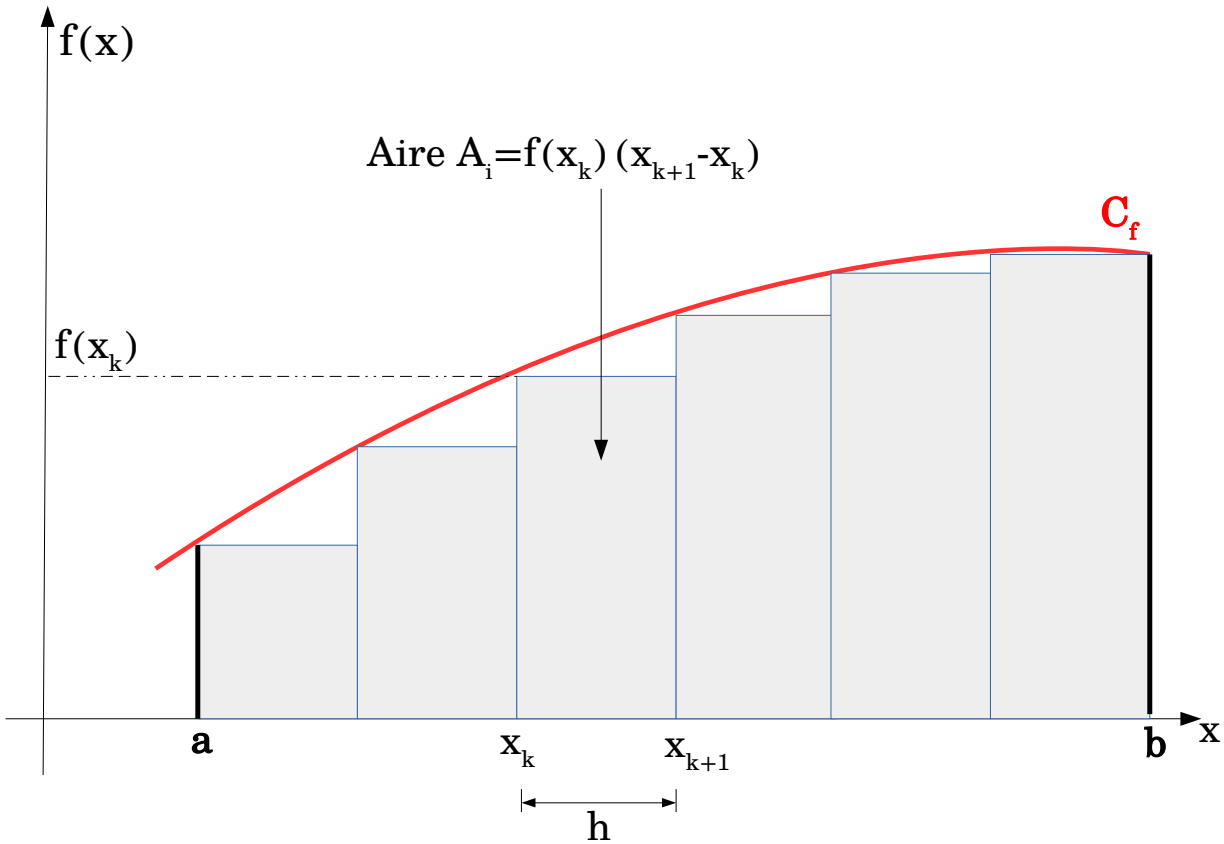
Évidemment : $Nh = b - a$ soit $h = \dfrac{b-a}{N}$.

h est appelé **le pas d'intégration de l'algorithme**.

Sur chaque intervalle $I_k = [a+kh, a+(k+1)h]$, on approche la fonction f par la fonction $\tilde{f}_k : x \to f(x_k)$ où $x_k = a+kh$.

Principe de la méthode des rectangles

Géométriquement :



On approche l'aire sous la courbe représentative de f par la somme des aires des rectangles de hauteur $f(x_k)$ et de largeur $(x_{k+1} - x_k)$.

Principe de la méthode des rectangles

Analytiquement, sur l'intervalle $[a, b]$, on obtient :

$$J = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{N-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow \widetilde{J} = \sum_{k=0}^{N-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \tilde{f}_k(x)\mathrm{d}x$$

$$\Leftrightarrow \widetilde{J} = \sum_{k=0}^{N-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x_k)\mathrm{d}x$$

$$\Leftrightarrow \widetilde{J} = \sum_{k=0}^{N-1} f(x_k)(x_{k+1} - x_k)$$

avec $x_k = a + kh$ et $x_{k+1} = a + (k+1)h$:

$$\boxed{\widetilde{J} = \sum_{k=0}^{N-1} f(x_k)h \quad \text{avec} \quad x_k = a + kh}$$

Implémentation en Python

```
1  def rect_integ(f,a,b,n):
2      """
3      Approximate the integral of function f over [a,b] using the
           rectangle method.
4      h=(b-a)/n is the integration step.
5      """
6      h=(b-a)/n
7      J=0
8      for k in range(n):
9          J=J+f(a+k*h)*h
10     return J
```

Essai

Essai sur $J = \int_0^1 4\sqrt{(1-x^2)}\mathrm{d}x = \pi$.

CODE PYTHON

```
In [1]: rect_integ(lambda x:4*sqrt(1-x**2),0,1,10)# h=0.1
Out[1]: 3.30451832625

In [2]: rect_integ(lambda x:4*sqrt(1-x**2),0,1,10000)# h=0.0001
Out[2]: 3.14179147761
```

L'erreur $e = \left|\widetilde{J} - J\right|$ semble diminuer avec la valeur du pas h.

Majoration de l'erreur

Erreur sur l'intégrale calculée

Soit $e = \left|\widetilde{J} - J\right|$ l'erreur sur le calcul de l'intégrale J sur $[a, b]$.

$$e < \frac{1}{2}\text{Sup}_{[a,b]}|f'(\xi)|h$$

L'erreur commise au pire sur J est de l'ordre du pas d'intégration h.

La méthode des rectangles est une méthode d'ordre 1.

Majoration de l'erreur

Preuve - Erreur d'intégration sur $I_k = [x_k, x_{k+1}]$.

- Soit $e_k = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x_k) - f(x)\mathrm{d}x$ l'erreur d'intégration sur $I_k = [x_k, x_{k+1}]$.
- En supposant f $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$ donc sur I_k, d'après le théorème des accroissements finis :

$$\forall x \in I_k, \exists \xi \in I_k \text{ tel que } f(x) = f'(\xi)(x - x_k) \text{ d'où :}$$

- $e_k = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f'(\xi)(x - x_k)\mathrm{d}x$
- $\Rightarrow |e_k| = |\int_{x_k}^{x_{k+1}} f'(\xi)(x - x_k)\mathrm{d}x|$
- $\Rightarrow |e_k| \leq \int_{x_k}^{x_{k+1}} |f'(\xi)(x - x_k)|\mathrm{d}x$
- $\Rightarrow |e_k| \leq \mathrm{Sup}_{I_k}|f'(\xi)| \int_{x_k}^{x_{k+1}} |(x - x_k)|\mathrm{d}x$
- $\Leftrightarrow |e_k| \leq \mathrm{Sup}_{I_k}|f'(\xi)| \frac{(x_{k+1} - x_k)^2}{2}$
- $\Leftrightarrow \boxed{|e_k| \leq \mathrm{Sup}_{I_k}|f'(\xi)| \frac{h^2}{2}}$

Majoration de l'erreur

Preuve - Erreur d'intégration sur $I = [a, b]$.

- Soit $e = |\widetilde{J} - J|$ l'erreur d'intégration sur $I_k = [a, b]$.
- $e = \sum_{k=0}^{N-1} e_k$
- $\Rightarrow |e| = |\sum_{k=0}^{N-1} |e_k|$
- Or, on a montré que : $|e_k| \leq \text{Sup}_{I_k} |f'(\xi)| \frac{h^2}{2}$ donc :
- $e \leq \sum_{k=0}^{N-1} \text{Sup}_{I_k} |f'(\xi)| \frac{h^2}{2}$
- $\Rightarrow e \leq \sum_{k=0}^{N-1} \text{Sup}_{[a,b]} |f'(\xi)| \frac{h^2}{2}$
- $e \leq N \text{Sup}_{[a,b]} |f'(\xi)| \frac{h^2}{2}$
- Or $N = \frac{(b-a)}{h}$, d'où :
- $\boxed{e \leq \text{Sup}_{[a,b]} |f'(\xi)| \frac{(b-a)}{2} h}$

Au pire, l'erreur commise sur $\widetilde{J}$ est de l'ordre du pas d'intégration h.

Complexité (vs efficacité)

```
1  def rect_integ(f,a,b,n):
2      """
3      Approximate the integral of function f over [a,b] using the
           rectangle method.
4      h=(b-a)/n is the integration step.
5      """
6      h=(b-a)/n
7      J=0
8      for k in range(n):
9          J=J+f(a+k*h)*h
10     return J
```

Unité de mesure : appel de la fonction f.

Complexité linéaire avec n : $O(n) = O\left(\frac{1}{h}\right)$.

Compromis efficacité/précision : quand $h \nearrow$, la précision augmente mais le nombre de calculs également.

Sommaire

Principe de la méthode des trapèzes

On procède de manière analogue à la méthode des rectangles.

On décompose l'intervalle $[a, b]$ en N intervalles I_k de longueur h : $[a, a+h]$, $[a+h, a+2h]$, ..., $[a+kh, a+(k+1)h]$, ... $[b-h, b]$.

Évidemment : $Nh = b - a$ soit $h = \dfrac{b-a}{N}$.

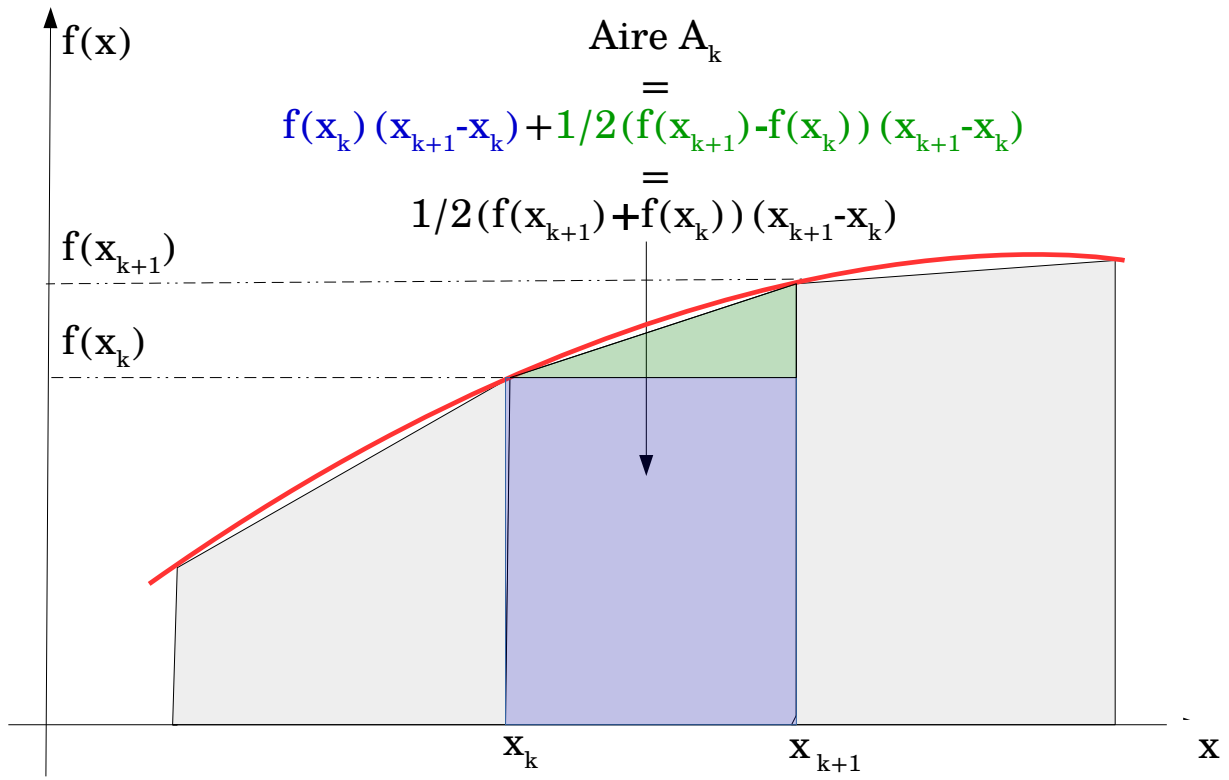
h est appelé **le pas d'intégration de l'algorithme**.

C'est le choix de la fonction $\tilde{f}_k$ approchant f sur $I_k = [a+kh, a+(k+1)h]$ qui est différent :

$$\tilde{f}_k : x \to \frac{f(x_{k+1}) - f(x_k)}{x_{k+1} - x_k}(x - x_k) + f(x_k) \quad \text{avec} \quad x_k = a + kh$$

Principe de la méthode des trapèzes

Géométriquement :



On approche l'aire sous la courbe représentative de f par la somme des aires des trapèzes de largeur $(x_{k+1} - x_k)$.

Principe de la méthode des trapèzes

Analytiquement, sur l'intervalle $[a, b]$, on obtient :

$$J = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{N-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow \widetilde{J} = \sum_{k=0}^{N-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \tilde{f}_k(x)\mathrm{d}x$$

En intégrant $\tilde{f}_k(x)$ ou plus simplement en évaluant géométriquement l'aire sous le segment de droite, on obtient :

$$\Leftrightarrow \widetilde{J} = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{2}(f(x_{k+1}) + f(x_k))(x_{k+1} - x_k)$$

avec $x_k = a + kh$ et $x_{k+1} = a + (k+1)h$:

$$\boxed{\widetilde{J} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} (f(a + (k+1)h) + f(a + kh))h}$$

Implémentation en Python

```
1  def trap_integ(f,a,b,n):
2      """
3      Approximate the integral of function f over [a,b] using the
           trapezoidal method.
4      h=(b-a)/n is the integration step.
5      """
6      h=(b-a)/n
7      J=0
8      for k in range(n):
9          J=J+(f(a+(k+1)*h)+f(a+k*h))*h
10     J=1/2*J
11     return J
```

Essai

Essai sur $J = \int_0^1 4\sqrt{(1-x^2)}\mathrm{d}x = \pi$.

CODE PYTHON

```
In [3]: trap_integ(lambda x:4*sqrt(1-x**2),0,1,10)# h=0.1
Out[3]: 3.14057361483

In [4]: trap_integ(lambda x:4*sqrt(1-x**2),0,1,10000)# h=0.0001
Out[4]: 3.14159147761
```

L'erreur $e = \left|\widetilde{J} - J\right|$ semble diminuer avec la valeur du pas h.

Majoration de l'erreur

Erreur sur l'intégrale calculée

Soit $e = \left|\widetilde{J} - J\right|$ l'erreur sur le calcul de l'intégrale J sur $[a, b]$.

$$e \leq \frac{1}{12} \mathrm{Sup}_{[a,b]} |f''(\xi)| h^2$$

L'erreur commise au pire sur l'évaluation de J est de l'ordre du carré du pas d'intégration h.

La méthode des trapèzes est une méthode d'ordre 2.

Majoration de l'erreur

Théorème de Taylor-Lagrange

Soit f une fonction définie sur un intervalle $[u, v]$ de $\mathbb{R}$ telle que :

- $\forall$ entier naturel $k \leq n$, $f^{(n)}$ existe et est continue sur $[u, v]$;
- $\forall$ entier naturel $k \leq n$, $f^{(n+1)}$ existe sur $]u, v[$.

Alors, $\exists \xi \in [u, v]$ tel que :

$$f(u) = f(v) + f'(u)(v-u) + \frac{1}{2}f''(u)(v-u)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(u)(v-u)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(v-u)^{n+1}$$

Majoration de l'erreur

Preuve - Erreur d'intégration sur $I_k = [x_k, x_{k+1}]$.

- Soit $e_k = \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{1}{2}(f(x_{k+1} - f(x_k)))(x_{k+1} - x_k) - f(x)\mathrm{d}x$ l'erreur d'intégration sur $I_k = [x_k, x_{k+1}]$.
- On suppose f $\mathcal{C}^2$ sur $[a, b]$ donc sur I_k quelque soit k.
- En utilisant le développement de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 sur $[x_k, x]$, $x \leq x_{k+1}$:

$$f(x) = f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k) + \frac{1}{2}f''(\xi)(x - x_k)^2$$

- Après intégration et majoration, il vient :

$$|e_k| \leq \frac{1}{12}\mathrm{Sup}_{I_k}|f''(\xi)|h^3$$

- Puis, on applique l'inégalité triangulaire à $e = \sum_{k=0}^{N-1} e_k$:

$$|e| \leq \sum_{k=0}^{N-1} |e_k|$$

- Ce qui donne : $\boxed{|e| \leq \frac{1}{12}\mathrm{Sup}_{[a,b]}|f''(\xi)|h^2}$

Complexité (vs efficacité)

```python
def trap_integ(f,a,b,n):
    """
    Approximate the integral of function f over [a,b] using the
        trapezoidal method.
    h=(b-a)/n is the integration step.
    """
    h=(b-a)/n
    J=0
    for k in range(n):
        J=J+(f(a+(k+1)*h)+f(a+k*h))*h
    J=1/2*J
    return J
```

Unité de mesure : appel de la fonction f.

Complexité linéaire avec n : $O(n) = O\left(\frac{1}{h}\right)$.

Compromis efficacité/précision : quand $h \nearrow$, la précision augmente mais le nombre de calculs également.

Méthode des trapèzes vs méthode des rectangles

Essai sur $J = \int_0^1 4\sqrt{(1-x^2)}\mathrm{d}x = \pi$.

CODE PYTHON

```
In [5]: rect_integ(lambda x:4*sqrt(1-x**2),0,1,10)# h=0.1
Out[5]: 3.30451832625

In [6]: trap_integ(lambda x:4*sqrt(1-x**2),0,1,10)# h=0.1
Out[6]: 3.14057361483
```

Méthode	Complexité	Erreur
Rectangles	$O\left(\frac{1}{h}\right)$	$\sim h$
Trapèzes	$O\left(\frac{1}{h}\right)$	$\sim h^2$

A complexité égale, la méthode des trapèzes fournit une approximation de l'intégrale nettement plus précise. En pratique, on préfère utiliser une méthode d'approximation d'ordre supérieur plutôt que diminuer le pas.

Sommaire

Fonctions prédéfinies du module `scipy.integrate`

Fonction `quad`. Utilise un algorithme à pas adaptatif écrit en langage `FORTRAN`.

Essai sur $J = \int_0^1 4\sqrt{(1-x^2)}\mathrm{d}x = \pi$.

CODE PYTHON

```
In [7]: trap_integ(lambda x:4*sqrt(1-x**2),0,1,1e8)# h=1e-8
Out[7]: 3.14159265355

In [8]: scipy.integrate.quad(lambda x:4*sqrt(1-x**2),0,1)# h variable
Out[8]: (3.1415926535897922, 3.533564552071766e-10)
```

On constate aussi que `quad` est nettement plus rapide que `trap_integ` !

En pratique, on utilisera les fonctions prédéfinies du module `scipy.integrate` plutôt que des fonctions implémentées par nos soins.