

COURS 0

DIMENSIONS & UNITÉS



David Malka

MPSI – 2018-2019 – Lycée Jeanne d'Albret



1 Dimension d’une grandeur physique

1.1 Que caractérise la dimension d’une grandeur physique ?

Grossièrement, la dimension d’une grandeur physique traduit la nature physique de cette grandeur¹. Deux grandeurs physiques de même dimension sont dites homogènes. Seule la comparaison de deux valeurs grandeurs physiques homogène a un sens.

➤ **Exemple :** *la masse, la vitesse, l’énergie sont des grandeurs de natures différentes et donc de dimensions différentes. La comparaison d’une masse et d’une longueur n’a pas de sens physique.*

1.2 Les sept dimensions fondamentales

Parmi toutes les dimensions existantes, on a choisi arbitrairement sept dimensions indépendantes données dans le tableau fig.1.

Dimension	Symbole	Unité légale associée	Symbole de l’unité
Longueur	L	mètre	m
Masse	M	kilogramme	kg
Temps	T	seconde	s
Intensité électrique	I	ampère	A
Température	θ	kelvin	K
Quantité de matière	N	mole	mol
Intensité lumineuse	J	candela	cd

FIGURE 1 – Les sept dimensions fondamentales

Toutes les autres dimensions, dites *dimensions dérivés* se déduisent par produit de puissance des sept dimensions fondamentales.

☞ *Un nombre pur, comme 2, π ..., n’a pas de dimension.*

☞ *Une quantité de matière est un nombre pur et n’a donc pas de dimension.*

☞ *Les arguments des fonctions ln, exp et des fonctions définies à partir de ln ou exp (cosh, sinh, cos, ...) doivent être adimensionnés.*

1.3 Équations dimensionnelles



Homogénéité et relations mathématiques

- $A = B \Rightarrow [A] = [B]$: deux grandeurs de valeurs égales ont nécessairement même dimension.
- $A + B = C + D \Rightarrow [A] = [B] = [C] = [D]$: les termes d’une somme ont nécessairement même dimension.
- $C = A \cdot B \Rightarrow [C] = [A][B]$: la dimension d’un produit de facteurs est le produit des dimensions des facteurs.



Application 1

Déterminer la dimension d’une vitesse v en fonction des dimensions fondamentales. Donner alors l’unité légale de vitesse. Faire de même pour une concentration molaire C .

Réponse

$[v] = L \cdot T^{-1}$, unité légale $m \cdot s^{-1}$ $[c] = L^{-3}$, unité légale $mol \cdot m^{-3}$.

1. Si deux grandeurs de même nature ont nécessairement même dimension, deux grandeurs de même dimension ne sont pas forcément de même nature : il en est ainsi d’une énergie et d’un moment de force dont la dimension commune est $M \cdot L^2 \cdot T^{-2}$ bien que différentes.

**Application 2**

Déduire la dimension d’un angle de sa définition mathématique.

Réponse

Un angle θ est le rapport de la longueur l d’un arc de cercle divisé par le rayon R de ce cercle : $\theta = \frac{l}{R}$.

On en déduit que la dimension d’un angle est nulle : $[\theta] = \frac{L}{L} = \emptyset$.

1.4 Homogénéité des relations : une règle d’or !**Faire de l’analyse dimensionnelle !**

Il faut procéder systématiquement à l’analyse dimensionnelle des grandeurs physiques et des équations intervenant dans un problème ^a.

a. Que ces grandeurs ou ces équations soient fournies par l’énoncé ou obtenues par calcul.

Cela permet, entre autres, de :

- de comprendre la signification physique des termes apparaissant dans les équations et expressions littérales,
- détecter des erreurs de calcul,
- de déterminer l’expression approchée d’une grandeur sans résoudre exactement le problème.

**Application 3**

Après une série de calculs, un étudiant aboutit à l’expression suivante pour l’accélération a d’un mobile :

$$a = \frac{v^2}{R^2}$$

où v est une vitesse et R une longueur. Que penser de la justesse de l’expression de a ?

Réponse

La dimension d’une accélération est $[L][T]^{-2}$, la dimension de $\frac{v^2}{R^2}$ est $[T]^{-2}$. a n’est donc pas homogène à une accélération donc l’expression proposée est nécessairement fautive.

2 Les unités**2.1 Le Système International d’unités (S.I.)**

L’ensemble des unités associées aux dimensions fondamentales constitue le *système international d’unités* (unités S.I.) : système mksA (mètre, kilogramme, seconde, Ampère) + K + mol + cd. Ces unités sont appelées unités légales. Tout calcul réalisé à partir de données numériques prises en unités S.I. donne un résultat en unité S.I. Il est recommandé de procéder de la sorte.

2.2 Les étalons de mesure

Toute quantification ² d’une grandeur se fait par comparaison avec une grandeur de référence : l’**étalon**. Voici quelques exemples d’étalons correspondants aux unités fondamentales ³.

2.2.1 Étalon de masse**Définition du kilogramme**

Le kilogramme est l’unité de masse ; il est égal à la masse du prototype international du kilogramme.

Le prototype international du kilogramme est un cylindre en platine irridié conservé au Bureau International des Poids et Mesures (BIPM) depuis 1889 (fig.2).

2. Quantifier signifie mesurer.

3. Ces étalons ont beaucoup changé au cours de l’histoire des sciences.



FIGURE 2 – L’étalon de masse en platine au BIPM

2.2.2 Étalon de durée



Définition de la seconde

La seconde s est la durée correspondant 9 192 631 770 périodes de la radiation correspondant à la transition entre les deux niveaux hyperfins de l’état fondamental de l’atome de césium ^{133}Cs .

C’est sur cet étalon que repose le principe des horloges les plus précises au monde (incertitude de l’ordre de $10^{-16} s!!!$) : les horloges atomiques (fig.3).

2.2.3 Étalon de longueur

L’étalon de longueur est défini à partir de la seconde et de la célérité C de la lumière dans le vide dont on sait que c’est une constante fondamentale.



Définition du mètre

Le mètre m est la distance parcourue par la lumière dans le vide en $\frac{1}{299\,792\,458} s$.

Cette définition impose la célérité de la lumière : $C = 299\,792\,458 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \approx 3 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

2.2.4 Étalon de quantité de matière



Définition de la mole

La mole est la quantité de matière d’un système contenant autant d’entités élémentaires qu’il y a d’atomes dans 0,012 kilogramme de carbone 12 ; son symbole est mol.

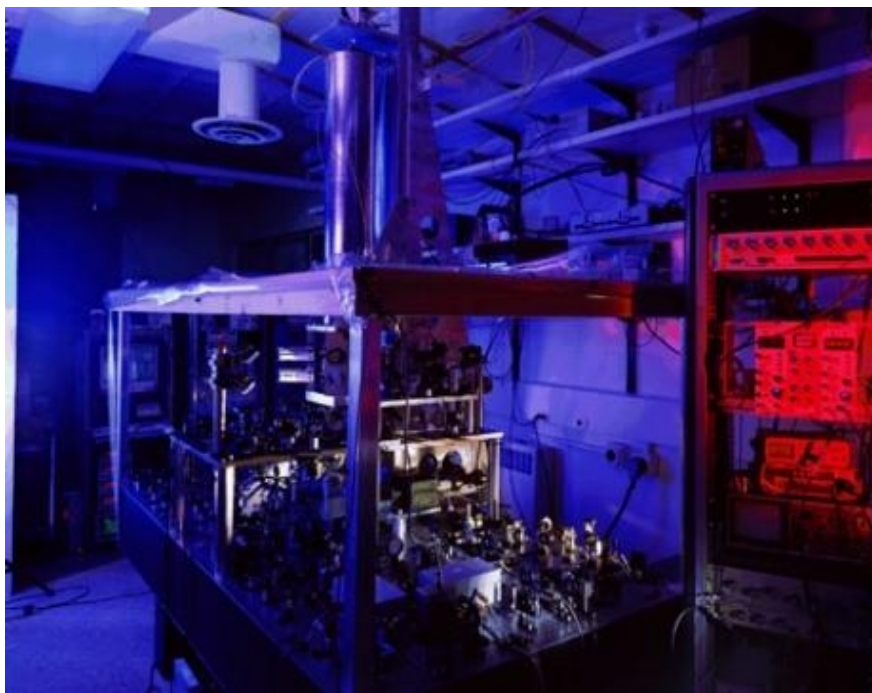



FIGURE 3 – Une horloge atomique basée sur l’étalon de durée

 *Le nombre d’entités contenu dans une mole est resté longtemps inconnu, d’autant plus que le caractère atomique de la matière n’était qu’une hypothèse. On sait depuis un siècle que cela correspond à environ $6,02 \cdot 10^{23}$ entités.*

2.2.5 Étalon de température



Définition du kelvin

Le kelvin, unité de température thermodynamique, est la fraction $\frac{1}{273,16}$ de la température thermodynamique du point triple de l’eau.

Il en résulte que la température thermodynamique du point triple de l’eau est égale à 273,16 kelvins exactement : $T_T = 273,16 \text{ K}$.

2.2.6 Autres étalons

Il existe également des étalons servant à définir l’ampère et le candela dont on ne donne pas ici la définition.

Sur le web

Site du BIPM (tout sur les étalons de mesure, les unités...) : <http://www.bipm.org/>.