DM1 – Physique-Chimie – Corrigé

D.Malka – MPSI 2020-2021 – Lycée Jeanne d'Albret

24-10-2020

Modèle simple de l'arc-en-ciel

1. Pour voir l'arc-en-ciel, l'observateur doit tourner le dos au soleil et regarder vers le rideau de pluie.
2. L'approximation de l'optique géométrique est valable ici si $\lambda << R$. Or $R \simeq 1\,\mathrm{mm}$ et, dans le domaine visible, $\lambda \sim 1\,\mu\mathrm{m}$ donc cette condition est vérifiée.
3. Étude quantitative

   3.1 Voir figure 1.

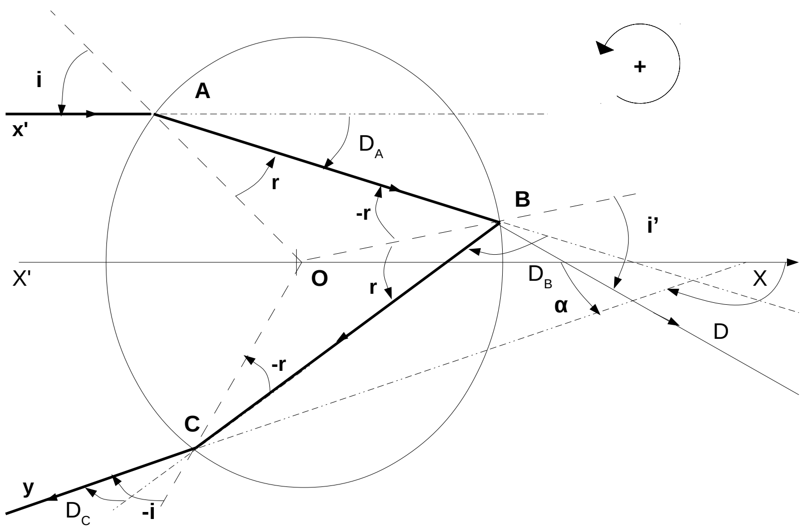

Figure 1 – Trajet de la lumière dans la goutte d'eau

   3.2 Condition de réflexion totale en B dans la goutte.

   Il y a existence d'un rayon réfracté en B si $-\dfrac{\pi}{2} \leq i' \leq 0$ soit $-1 \leq \sin i' \leq 0$ avec i' l'angle de réfraction en B. Or, d'après la 4e loi de Descartes, $n\sin(-r) = \sin i' \Leftrightarrow \sin i' = -n\sin r$.
   La condition d'existence du rayon réfracté devient :

$$0 \leq \sin r \leq \frac{1}{n}$$

   On en déduit la condition de réflexion totale :

$$\boxed{\sin r > \frac{1}{n}} \quad \text{soit} \quad \boxed{r > \arcsin\left(\frac{1}{n}\right)}$$

   3.3 Expression de l'angle α en fonction de r et i. Voir figure 1.
   $\alpha = D + \pi$ avec $D = D_A + D_B + D_C$ la déviation totale de la lumière résultant des déviations successives D_A, D_B et D_C en A, B puis C. Or $D_A = -i + r$, $D_B = -\pi + 2r$ et $D_C = -i + r$ d'où :

$$\boxed{\alpha = 4r - 2i}$$

3.4 Soit α_E l'extremum de α en admettant qu'il existe, alors :

$$\boxed{\left(\frac{\partial \alpha}{\partial i}\right)_{i_E} = 0}$$

En remplaçant α par sa valeur, il vient : $\left(\frac{\partial \alpha}{\partial i}\right)_{ß_E} = 4\left(\frac{\partial r}{\partial i}\right)_{i_E} - 2 = 0$ d'où :

$$\boxed{\left(\frac{\partial r}{\partial i}\right)_{i_E} = \frac{1}{2}}$$

3.5 Dérivons par rapport i à la loi de Descartes en A. Attention, n'oublions pas que r dépend i !

$$\begin{aligned} n \sin r &= \sin i \\ \Rightarrow -n\frac{\partial r}{\partial i}\cos r &= -\cos i \\ \Leftrightarrow &\boxed{\frac{\partial r}{\partial i} = \frac{\cos i}{n\cos r}} \end{aligned}$$

3.6 Soit r_E l'angle de réfraction associé à i_E.

$$\begin{aligned} \sin i &= n \sin r \\ \Rightarrow \sin^2 i &= n^2 \sin^2 r \\ \Rightarrow 1 - \cos^2 r &= \frac{1}{n^2}(1-\cos^2 i) \end{aligned}$$

Or pour $i = i_E$, $\left(\frac{\partial r}{\partial i}\right)_{i_E} = \frac{1}{2} = \frac{\cos i}{n\cos r}$ d'où

$$\cos r_E = \frac{2}{n}\cos i_E$$

En substituant $\cos_r$, on en déduit :

$$\boxed{\cos i_E = \sqrt{\frac{n^2-1}{3}}}$$

En substituant $\cos_i$, on en déduit :

$$\boxed{\cos r_E = \sqrt{\frac{4}{3}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)}}$$

3.7 D'après les questions précédentes :

$$\boxed{\alpha_E = 4\arccos\sqrt{\frac{4(n^2-1)}{3n^2}} - 2\arccos\sqrt{\frac{n^2-1}{3}}}$$

(car $r_E \in [0, \frac{\pi}{2}]$ et $i_E \in [0, \frac{\pi}{2}]$)

4. Rôle du phénomène de dispersion

4.1 Pour le rouge, $\alpha_{E,r} = 42{,}2\,°$; pour le violet, $\alpha_{E,v} = 41{,}5\,°$.

4.2 Le calcul précédent montre que les couleurs se succèdent de haut en bas de la façon suivante : rouge, orange, jaune, vert, bleu, violet.

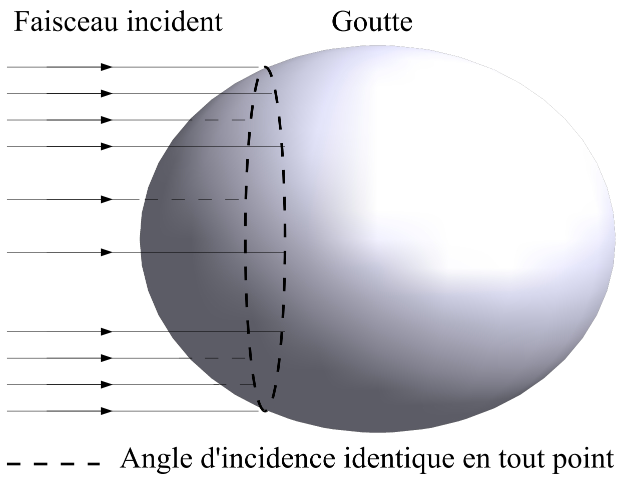

Figure 2 – Différents rayons de même incidence sur une goutte

4.3 Tous les rayons lumineux qui constituent le trajet de la lumière appartiennent au plan d'incidence. Ce plan d'incidence est définit par le rayon d'incidence et la normale à la goutte. Or il y a autant de normales différentes que de rayons incidents sur la goutte. Pour l'angle d'incidence donné, les normales correspondantes se répartissent sur le cercle indiqué sur la figure 2.

Ainsi pour une incidence donnée la goutte renvoie de la lumière dans de multiple direction avec le même angle α par rapport à XX' [1]. Si on se place du point de vu de l'observateur, la lumière qu'il perçoit alors sous l'angle α_E provient de différentes gouttes se répartissant sur un cercle qui est la coupe du cône d'axe XX' (direction d'incidence) et d'angle au sommet α_E [2]. L'observateur devrait donc percevoir des cercles de lumière colorée concentriques. En pratique (sauf vu d'avion), ces cercles sont interceptés par l'horizon et on ne voit que des arcs : c'est le phénomène de l'arc-en-ciel.

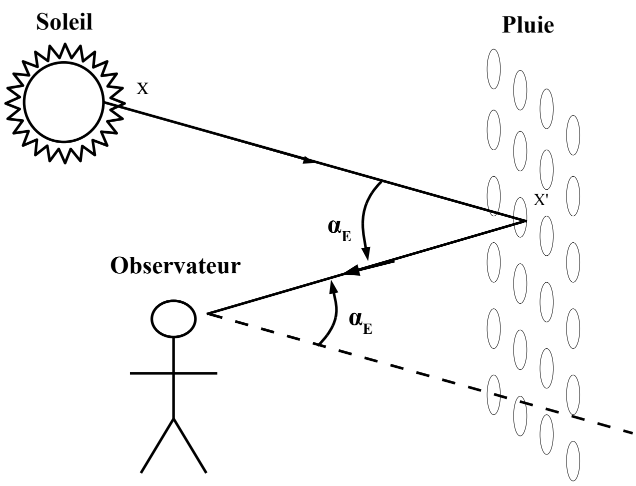

Figure 3 – Pourquoi voit-on des arcs ?

4.4 On peut observer deux arcs en cas de double réflexion de la lumière dans les gouttes d'eau. L'intensité est évidemment plus faible.

1. Pour une représentation de ces rayons : voir la simulation idoine du site de Geneviève Tulloue.
2. Plus rapidement dit mais moins explicitement : le problème présente une symétrie de révolution d'axe XX' ; tout se passe identiquement dans chaque plan contenant XX'