



DS10 – PHYSIQUE-CHIMIE – CORRIGÉ

D.Malka – MPSI 2020-2021 – Lycée Jeanne d'Albret

18.06.2021

Problème 1 – Récupérer l'énergie de la houle

A – Des vagues au système mécanique

1. Système : pendule

Référentiel : terrestre, galiléen

Inventaire des actions mécaniques :

— poids de résultante $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{u}_z$ et de moment :

$$\vec{M}(\vec{P}) = \vec{OG} \wedge \vec{P} = mgd \sin \theta \vec{u}_y$$

— poussée d'Archimède de résultante $\vec{\Pi} = -\rho_e V \vec{g} = \rho_e V g \vec{u}_y$ et de moment :

$$\vec{M}(\vec{\Pi}) = \vec{OG} \wedge \vec{\Pi} = -\rho_e V g d \sin \theta \vec{u}_y$$

— force dissipative de moment $\vec{C} = -\alpha \theta \vec{u}_y$

— force de la houle de résultante $\vec{F} = \beta \cos(\omega t) \vec{u}_x$ et de moment :

$$\vec{M}(\vec{F}) = \vec{OG} \wedge \vec{F} = \beta \cos(\omega t) \cos \theta \vec{u}_y$$

Le vecteur \vec{u}_y étant entrant, les signes des moments indiquent que, dans la situation de la figure, le poids tend à faire tourner le pendule dans le sens horaire de même que la force de la houle si $\cos \omega t > 0$ tandis que la poussée d'Archimède tend à le faire tourner dans le sens trigonométrique. Ceci est bien conforme à l'expérience.

2. En l'absence de houle, les seuls moments subis par le pendule sont celui du poids et de la poussée d'Archimède. En $\theta = 0$, la somme des moments est nulle car \vec{P} et $\vec{\Pi}$ sont colinéaires à \vec{OG} . Pour que $\theta = 0$ soit une position d'équilibre stable, il faut que le couple résultant d'un léger écart du pendule par rapport à $\theta = 0$ tende à l'y ramener. Ce couple s'écrit :

$$\vec{\Gamma} = \vec{M}(\vec{\Pi}) + \vec{M}(\vec{P}) = (m - \rho_e V) g d \sin \theta \vec{u}_y$$

Si $\sin \theta > 0$, il faut $\vec{\Gamma} \cdot \vec{u}_y < 0$ (le couple tend à faire tourner le pendule dans le sens trigonométrique) et si $\sin \theta < 0$, il faut $\vec{\Gamma} \cdot \vec{u}_y > 0$ (le couple tend à faire tourner le pendule dans le sens horaire). On en déduit la condition de stabilité :

$$\rho_e V > m$$

Ce qui signifie tout simplement que le pendule doit être moins dense que l'eau !

3. Équation du mouvement du solide S . Le système et le référentiel ont été définis en question 1 de même que l'inventaire des actions mécaniques a été réalisé. On applique au pendule le théorème du moment cinétique par rapport l'axe O_y dans le référentiel terrestre galiléen :

$$\frac{d\vec{L}_S}{dt} = \vec{M}(\vec{\Pi}) + \vec{M}(\vec{P}) + \vec{C} + \vec{M}(\vec{F})$$

Avec les expressions des moments précédemment établis et le moment cinétique de S s'écrivant $\vec{L}_S = J\dot{\theta} \vec{u}_y$, il vient :

$$J\ddot{\theta} = (m - \rho_e V)gd \sin \theta - \alpha\dot{\theta} + \beta \cos(\omega t) \cos \theta$$

$$\ddot{\theta} + \frac{\alpha}{J}\dot{\theta} + \frac{\rho_e V - m}{J}gd \sin \theta = \frac{\beta}{J} \cos(\omega t) \cos \theta$$

4. À l'ordre 1 en θ , $\sin \theta = \theta + o(\theta)$ et $\cos \theta = 1 + o(\theta)$. L'équation du mouvement se linéarise à cet ordre :

$$\ddot{\theta} + \frac{\alpha}{J}\dot{\theta} + \frac{\rho_e V - m}{J}gd\theta = \frac{\beta}{J} \cos(\omega t)$$

Soit, en posant $\omega_0 = \sqrt{\frac{(\rho_e V - m)gd}{J}}$ (la racine est définie par la condition $\rho_e V > m$), $2\lambda = \frac{\alpha}{J}$ et

$$f(t) = \frac{\beta}{J} \cos(\omega t),$$

$$\ddot{\theta} + 2\lambda\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = f(t)$$

5. On se place en régime sinusoïdal forcé. L'équation du mouvement étant linéaire et le second membre étant harmonique de pulsation ω , on cherche $\theta(t)$ sous la forme $\theta(t) = \theta_0(\omega) \cos(\omega t + \varphi(\omega))$. L'amplitude complexe θ_0 vérifie l'équation du mouvement ce qui donne :

$$-\omega^2\theta_0 + 2\lambda\theta_0 + \omega_0^2\theta_0 = \frac{\beta}{J}$$

$$\Leftrightarrow \theta_0 = \frac{\beta/J}{\omega^2 - \omega_0^2 + 2j\lambda\omega}$$

$$\Rightarrow \theta_0(\omega) = \frac{|\beta|/J}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\lambda^2\omega^2}}$$

6. Puissance récupérée $P_r(t) = \gamma\dot{\theta}^2$ avec $\dot{\theta} = -\theta_0\omega \sin(\omega t + \varphi)$ donc $P_r(t) = \gamma\theta_0^2\omega^2 \sin^2(\omega t + \varphi)$. On en déduit la puissance moyenne récupérée :

$$P_m = \frac{\gamma}{2}\theta_0^2\omega^2 = \frac{\gamma\beta^2/2J^2}{\left(\frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega}\right)^2 + 4\lambda^2}$$

7. Variation de la puissance moyenne reçue avec la pulsation. Il est évident que P_m tend vers 0 quand $\omega \rightarrow 0$ et $\omega \rightarrow +\infty$. À la résonance, la puissance est maximale c'est-à-dire que le dénominateur est minimal ce qui est réalisé pour $\frac{\omega_r^2 - \omega_0^2}{\omega_r} = 0$ soit $\omega_r = \omega_0$.

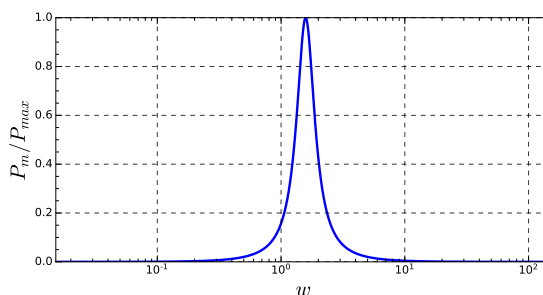


FIGURE 1 – Puissance moyenne récupérée via le pendule

8. Avec les valeurs fournies et sachant que $\rho_e \approx 1,0 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^3$ et $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, on trouve $\omega_0 = 1,5 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ et $T_0 = 4,2 \text{ s}$.

B – Production d’électricité par induction

9. Exprimer le flux $\phi_{1 \rightarrow 2}$ du champ \vec{B}_2 à travers la bobine 1.

$$\begin{aligned}\phi_{1 \rightarrow 2} &= \iint \vec{B}_2 \cdot d\vec{S} \\ \Rightarrow \phi_{1 \rightarrow 2} &= K_2 i_2(t) N_1 S \vec{u}_z \cdot \vec{n} \\ \Rightarrow \phi_{1 \rightarrow 2} &= K_2 N_1 S i_2(t) \cos \theta\end{aligned}$$

10. Par définition de l’inductance mutuelle : $\phi_{1 \rightarrow 2} = M i_2$ et $\phi_{2 \rightarrow 1} = M i_1$ d’où $\phi_{2 \rightarrow 1} = \phi_{1 \rightarrow 2} \frac{i_1}{i_2}$. Il vient alors :

$$\phi_{2 \rightarrow 1} = K_2 N_1 S i_1 \cos \theta$$

11. Équation électrique relative à la bobine 2. Le schéma électrique équivalent à la bobine 2 se réduit à un circuit à une maille comprenant la résistance R et une source de tension de f.e.m. $e(t) = -\frac{d\phi_{2 \rightarrow 1}}{dt} = K_2 N_1 S i_1 \dot{\theta} \sin \theta$. On en déduit :

$$i_2 = \frac{e(t)}{R} = \frac{K_2 N_1 S i_1}{R} \dot{\theta} \sin \theta$$

12. On peut modéliser la bobine 1 par un dipôle magnétique de moment $\vec{m}_1 = N_1 S i_1 \vec{n}$. Dans ce cas, plongée dans le champ magnétique \vec{B}_2 , le rotor subit le couple $\vec{\Gamma} = \vec{m} \wedge \vec{B}_2$ soit avec les expressions de B_2 , i_2 et m_1 :

$$\vec{\Gamma} = -\frac{K_2^2 N_1^2 S^2 i_1^2}{R} \dot{\theta} \sin^2 \theta \vec{u}_y$$

13. Dans l’approximation des petits angles $\sin \theta \approx \theta$. Il vient alors :

$$\vec{\Gamma} = -k \theta^2 \dot{\theta} \vec{u}_y \quad \text{avec} \quad k = \frac{K_2^2 N_1^2 S^2 i_1^2}{R}$$

14. Le signe négatif de l’expression de $\vec{\Gamma}$ indique que le couple est résistant ce qui est conforme à la loi de Lenz puisque ce couple est un effet de l’induction dont la cause est le mouvement du pendule.

15. Le couple $\vec{\Gamma}$ est anharmonique donc l’équation du mouvement (théorème du moment cinétique appliqué au pendule) est non linéaire. Ainsi l’hypothèse d’une réponse harmonique du pendule à une houle sinusoïdale est discutable.

Problème 2 – L’hydrazine

L’hydrazine est la molécule de formule brute de N_2H_4 .

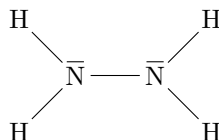
Potentiels standard (extrapolés à $pH = 0$) :

$$- E_{N_2/N_2H_5^+}^\circ = -0,20 \text{ V.}$$

$$- E_{N_i^{2+}/N_i}^\circ = -0,257 \text{ V.}$$

$$1. N(Z = 7) : 1s^2 2s^2 2p^3.$$

2. Nombre d’électrons de valence de l’hydrazine : $n_{e^-} = 2 \times 5 + 4 = 14$ donc 7 doublets à passer. Schéma de Lewis :



3. Écrire les réactions d’équilibre acido-basiques entre l’hydrazine N_2H_4 et l’ion $N_2H_5^+$ d’une part, et entre $N_2H_5^+$ et $N_2H_6^{2+}$ d’autre part. Placer les domaines de prédominance des trois espèces sur une échelle de pH . Comment peut-on qualifier l’ion hydrazinium $N_2H_5^+$?

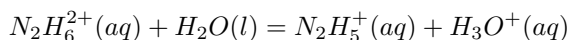
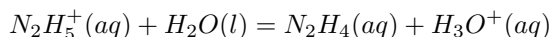
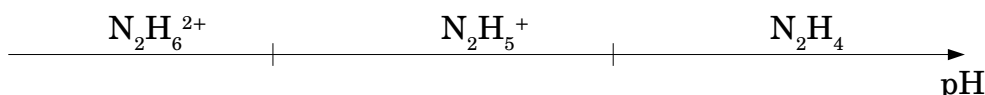


Diagramme de prédominance :



$N_2H_5^+(aq)$ est un ampholyte.

4. Le degré d’oxydation de N vaut $-II$ dans les espèces N_2H_4 , $N_2H_5^+$, $N_2H_6^{2+}$ et vaut 0 dans N_2 . Il peut s’établir un équilibre d’oxydoréduction entre N_2H_4 , $N_2H_5^+$ ou $N_2H_6^{2+}$ d’une part et N_2 d’autre part. N_2 joue le rôle d’oxydant.
5. Diagramme E-pH de l’hydrazine : fig.3

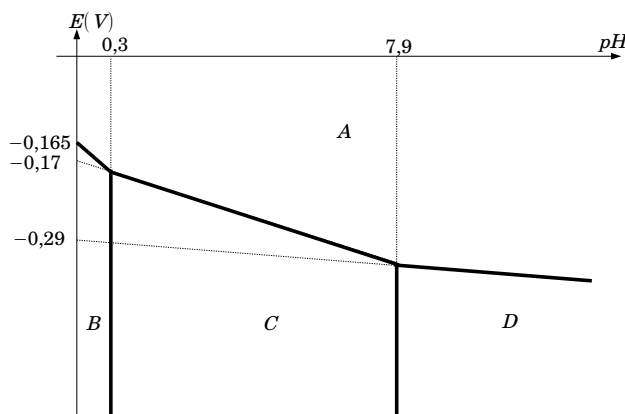


FIGURE 2 – Diagramme potentiel-pH de l’hydrazine à $T = 298\text{ K}$. A : N_2 , B : $N_2H_6^{2+}$, C : $N_2H_5^+$, D : N_2H_4 .

6. Frontières des domaines de prédominance de N_2H_4 , $N_2H_5^+$, $N_2H_6^{2+}$: pKa des couples acido-basiques. On lit les valeurs des constantes d’acidité $pKa_1 = 0,3$ et $pKa_2 = 7,9$.
7. Demi-équations électroniques des couples :
- N_2/N_2H_4 : $N_2 + 4e^- + 4H^+ = N_2H_4$
 - $N_2/N_2H_5^+$: $N_2 + 4e^- + 5H^+ = N_2H_5^+$
 - $N_2/N_2H_6^{2+}$: $N_2 + 4e^- + 6H^+ = N_2H_6^{2+}$
8. Pente de la frontière entre les espèces N_2 et N_2H_4 . Relation de Nernst :

$$E(N_2/N_2H_4) = E^\circ(N_2/N_2H_4) + \frac{0,06}{4} \log \left(\frac{[H^+]^4 P_{N_2}}{[N_2H_4] p^\circ (c^\circ)^3} \right)$$

$$E(N_2/N_2H_4) = E^\circ(N_2/N_2H_4) - 0,06 \mathbf{pH} + \frac{0,06}{4} \log \left(\frac{P_{N_2} c^\circ}{[N_2H_4] p^\circ} \right)$$

De même :

$$E(N_2/N_2H_5^+) = E^\circ(N_2/N_2H_5^+) - 0,075 \mathbf{pH} + \frac{0,06}{4} \log \left(\frac{P_{N_2} c^\circ}{[N_2H_5^+] p^\circ} \right)$$

De même :

$$E(N_2/N_2H_6^{2+}) = E^\circ(N_2/N_2H_6^{2+}) - 0,09pH + \frac{0,06}{4} \log \left(\frac{P_{N_2}c^\circ}{[N_2H_6^{2+}]p^\circ} \right)$$

9. Convention retenue pour la concentration des espèces en solution.

$$E(N_2/N_2H_5^+) = E^\circ(N_2/N_2H_5^+) - 0,075pH + \frac{0,06}{4} \log \left(\frac{P_{N_2}}{[N_2H_5^+]p^\circ} \right)$$

A la frontière : $P_{N_2} = p^\circ$, $[N_2/N_2H_5^+] = c_{tr}$ et en $pH = 0$,

$$E(N_2/N_2H_5^+) = E^\circ(N_2/N_2H_5^+) - 0,075pH + 0,015 \log \left(\frac{P_{N_2}}{[N_2/N_2H_5^+]p^\circ} \right)$$

avec $E^\circ(N_2/N_2H_5^+) = 0,20$ et $E(N_2/N_2H_5^+) = 0,17$.

Après calcul, on trouve $c_{tr} = 1 \times 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$.

10. Potentiel standard du couple N_2/N_2H_4 ? La relation de Nernst en $pH = 0$ donne $E^\circ(N_2/N_2H_4) = 0,153 \text{ V}$.

11. Au dessus de pH_1 pour lequel $E(Ni^{2+}/Ni) = E(N_2/N_2H_5^+)$, l’ion hydrazinium $N_2H_5^+$ peut réduire l’ion Ni^{2+} en métal nickel Ni (domaines de prédominance disjoints).

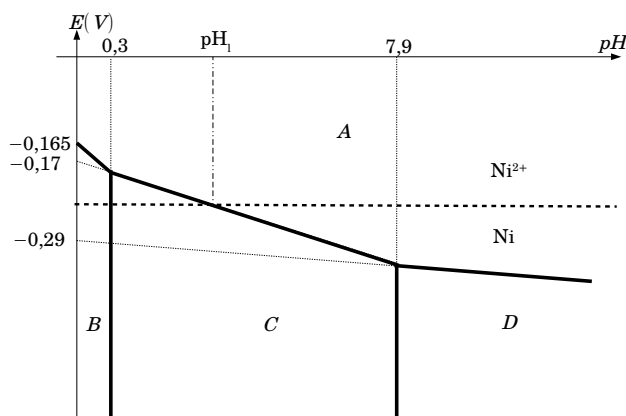
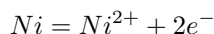


FIGURE 3 – Diagramme potentiel-pH de l’hydrazine à $T = 298 \text{ K}$.



$$E(Ni^{2+}/Ni) = E^\circ(Ni^{2+}/Ni) + 0,03 \log \frac{[Ni^{2+}]}{c^\circ}$$

En prenant comme concentration de tracé pour le Nickel $1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$:

$$E(Ni^{2+}/Ni) = E^\circ(Ni^{2+}/Ni)$$

Alors :

$$E(Ni^{2+}/Ni) > E(N_2/N_2H_5^+)$$

$$E(Ni^{2+}/Ni) > E^\circ(N_2/N_2H_5^+) - 0,075pH + \frac{0,06}{4} \log \left(\frac{P_{N_2}c^\circ}{[N_2H_5^+]p^\circ} \right)$$

$$pH > \frac{1}{0,075} \left(E^\circ(N_2/N_2H_5^+) - E^\circ(Ni^{2+}/Ni) + \frac{0,06}{4} \log \left(\frac{P_{N_2}c^\circ}{[N_2H_5^+]p^\circ} \right) \right)$$

A.N. : $P_{N_2} = p^\circ$, $[N_2H_5^+] = 1 \times 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$, $pH > 1,2$