



DS2 – PHYSIQUE-CHIMIE – CORRIGÉ

D.Malka – MPSI 2018-2019 – Lycée Jeanne d'Albret

06-10-2018

Problème 1 – Autour du Thallium

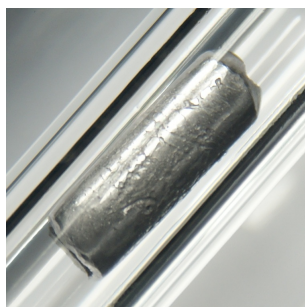
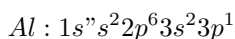


FIGURE 1 – Un échantillon de Thallium. Par Hi-Res Images of Chemical Elements — <http://images-of-elements.com/thallium.php>, CC BY 3.0, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=28869960>

Données :

- constante de Planck $h = 6,63 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$,
- définition de l'électron-Volt : $1 \text{ eV} = 1,6 \times 10^{-19} \text{ J}$.

1. L'isotope ${}_{81}^{205}\text{Tl}$ du thallium est composé de $Z = 81$ protons et de $N = A - Z = 205 - 81 = 124$ neutrons.
2. Configuration électronique de l'atome d'aluminium Al ($Z = 13$) dans son état fondamental.



3. Le thallium appartient à la famille de l'aluminium et à la sixième période donc sa couche de valence sa configuration électronique s'écrit :



4. L'aluminium forme Al^{3+} pour acquérir la configuration électronique du gaz noble le plus proche (le néon). Appartenant à la même famille que l'aluminium, l'ion stable a priori formé par l'atome de thallium est Tl^{3+} .
5. La figure 2 fait apparaître quelques niveaux d'énergie électronique du thallium, le niveau fondamental étant $6^2P_{1/2}$.

5.1 La raie dont la longueur d'onde appartenant au domaine du visible est $\lambda = 5350,46 \text{ \AA}$: il s'agit donc de la raie observé par Crookes. La transition électronique correspondante s'opère entre les niveaux d'énergie $7^2S_{1/2}$ et $6^2P_{3/2}$.

5.2 Calculons l'énergie du niveau noté $6^2P_{3/2}$. D'après le diagramme des niveaux d'énergie, par conservation de l'énergie :

$$\begin{aligned} \text{— } E(7^2S_{1/2}) - E(6^2S_{1/2}) &= \frac{hc}{\lambda_1} \quad \text{avec } \lambda_1 = 5350,46 \text{ \AA}; \\ \text{— } E(7^2S_{1/2}) - E(6^2S_{3/2}) &= \frac{hc}{\lambda_2} \quad \text{avec } \lambda_2 = 3775,22 \text{ \AA}. \end{aligned}$$

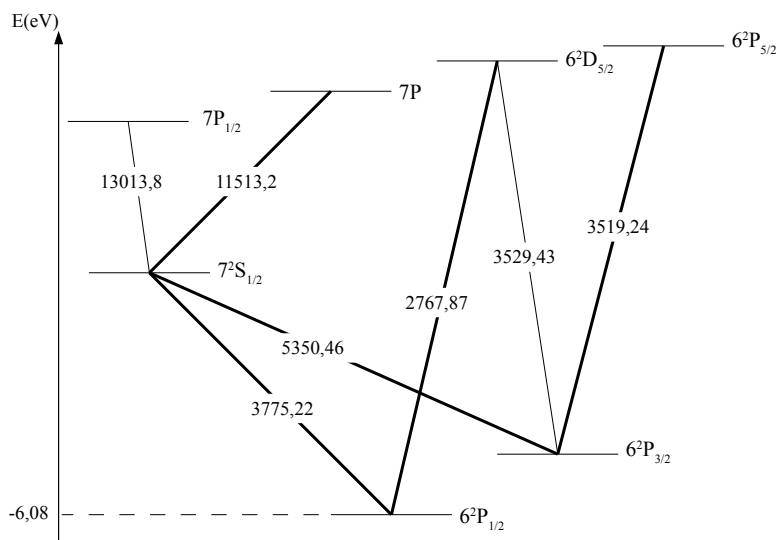


FIGURE 2 – Quelques transitions de l’atome de Thallium

On en déduit :

$$E(6^2S_{3/2}) = E(6^2S_{1/2}) + \frac{hc}{\lambda_2} - \frac{hc}{\lambda_1}$$

A.N. : $E(6^2S_{3/2}) = -5,11 \text{ eV}$

Problème 2 – Principe de l’échographie

1. Généralités sur les ondes sonores

- 1.1 Une onde sonore est une vibration mécanique longitudinale d’un milieu matériel, par exemple l’air, se propageant de proche en proche.
- 1.2 L’oreille humaine n’est sensible qu’aux sons de fréquence $f \in [20 \text{ Hz}, 20 \text{ kHz}]$.
- 1.3 Dans l’air la célérité du son vaut en moyenne $c_s \approx 340 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Elle est plus faible que dans l’eau.

2. Modélisation des ondes émises par la sonde échographique

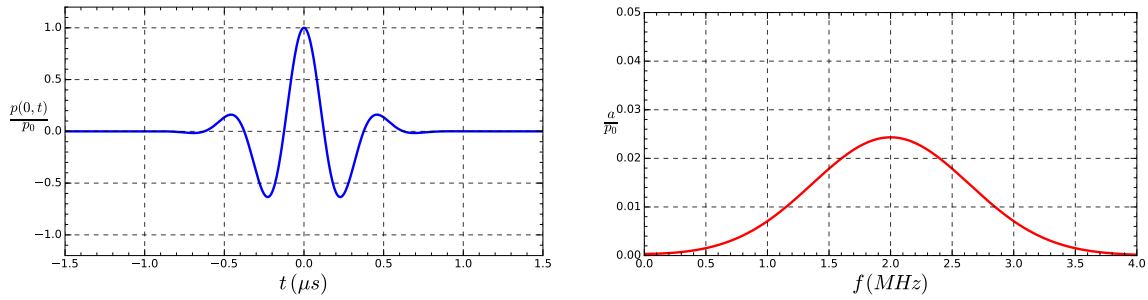
Les impulsions ultrasonores émises par la sonde dans les corps sont modélisées par la surpression

$$p(x = 0, t) = p_0 e^{-t^2/\tau^2} \cos(\omega t) \quad \text{avec} \quad \tau = 1,00 \mu\text{s}$$

au niveau de l’émetteur (fig.3). On suppose que le signal se propage ensuite dans le corps sous la forme d’une onde progressive unidimensionnelle vers les x croissants à la célérité c_s . L’axe Ox est appelé ligne de tir de la sonde.

- 2.1 Le spectre d’une onde harmonique contient un pic très étroit. Ici il est très élargi : l’impulsion ne peut pas être assimilée à une onde harmonique. La pulsation *centrale* de l’onde vaut $\omega = 2\pi f$ avec graphiquement $f = 2,0 \text{ MHz}$ donc $\omega = 12,6 \times 10^6 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.
- 2.2 L’expression $p(x = 0, t) = p_0 e^{-t^2/\tau^2} \cos(\omega t)$ montre e^{-t^2/τ^2} est un préfacteur d’atténuation du signal. L’argument $\frac{t^2}{\tau^2}$ de l’exponentielle doit être adimensionné donc $[\tau] = T$. Ainsi on peut conclure que τ est la durée caractéristique de l’impulsion.
- 2.3 Quelle expression pour l’onde $p(x, t)$:
 - (a) $p_0 \cos(\omega t - kx)$: ne convient pas car l’onde n’est pas harmonique,
 - (b) $p_0 \cos(\omega t + kx)$: ne convient pas car l’onde n’est pas harmonique et propagation vers les x croissants,





(a) Impulsion ultrasonore au niveau de la sonde ($x = 0$). (b) Spectre de l’impulsion ultrasonore. Ce spectre est qualitativement inchangé lors de la propagation de l’onde.

FIGURE 3 – Modélisation de l’impulsion ultrasonore

- (c) $p_0 e^{-t^2/\tau^2} \cos(\omega t - kx)$: ne convient pas car retard à la propagation manquant dans l’exponentielle,
- (f) $p_0 e^{-(t-x/c_s)^2/\tau^2} \cos(\omega t - kx)$: convient,
- (e) $p_0 e^{-t^2/\tau^2} \cos(\omega t + kx)$: ne convient pas car retard à la propagation manquant dans l’exponentielle et vers les x croissants.

Plus précisément, par définition d’une onde et du retard à la propagation, $p(x, t)$ soit s’écrire :

$$p(x, t) = p(0, t - x/c_s) = p_0 e^{-(t-x/c_s)^2/\tau^2} \cos(\omega(t - x/c_s)) = p_0 e^{-(t-x/c_s)^2/\tau^2} \cos(\omega t - kx)$$

On en déduit que $k = \frac{\omega}{c_s}$. A.N. : $\omega = 12,6 \times 10^6 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, $c_s = 1,50 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ donne $k = 8,40 \times 10^3 \text{ m}^{-1}$.

3. Principe de l’échographie

3.1 Propriétés acoustiques des milieux biologiques

3.1.1 Compressibilité χ_{eau} de l’eau.

$$c_{\text{eau}} = \frac{1}{\sqrt{\rho_{\text{eau}} \chi_{\text{eau}}}} \Leftrightarrow \chi_{\text{eau}} = \frac{1}{\rho_{\text{eau}} c_{\text{eau}}^2}$$

A.N. : $\rho_{\text{eau}} = 1,0 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ (ordre de grandeur à connaître!), $c_{\text{eau}} = 1,50 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ donne $\chi_{\text{eau}} = 4,44 \times 10^{-10} \text{ Pa}^{-1}$

3.1.2 Impédance acoustique de l’eau Z_{eau} .

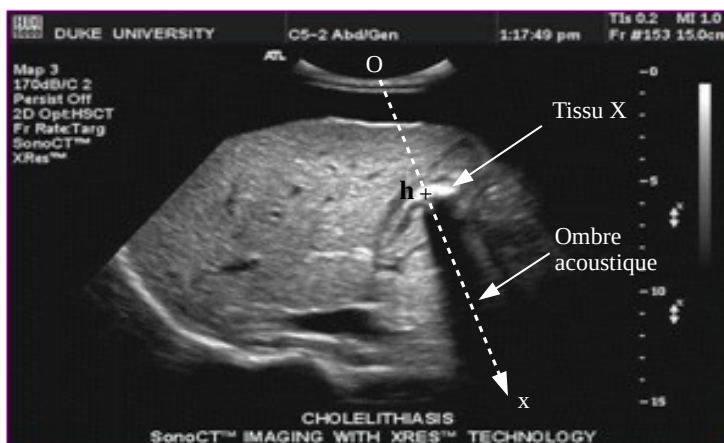
$$Z_{\text{eau}} = \sqrt{\frac{\rho_{\text{eau}}}{\chi_{\text{eau}}}}$$

A.N. : $Z_{\text{eau}} = 1,50 \times 10^6 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$. Cette valeur est très proche de celles des tissus mous ($Z_{\text{tm}} = 1,62 \times 10^6 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$) ce qui est cohérent en supposant que ces tissus sont essentiellement composés d’eau.

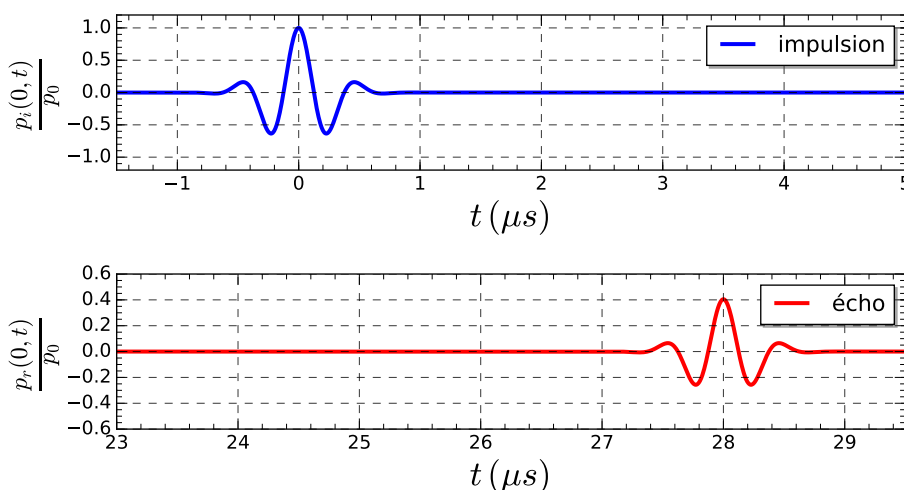
Pour la suite, on donne plus précisément le tableau fig.4 des valeurs numériques des impédances acoustiques de quelques milieux biologiques :

Milieu	Air	Graisse	Tissu mou	Foie	Muscle	Os
$Z(\text{kg} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1})$	400	$1,36 \times 10^6$	$1,62 \times 10^6$	$1,66 \times 10^6$	$1,71 \times 10^6$	$7,80 \times 10^6$

FIGURE 4 – Impédance acoustiques de quelques milieux biologiques



(a) Image obtenue par échographie. L’intensité du signal est codée en niveau de gris ; le noir correspondant à une intensité nulle de l’écho, le blanc à une intensité importante de l’écho.



(b) Impulsion ultrasonore et son écho engendré par le tissu X.

FIGURE 5 – Signal échographique et son traitement sous forme d’image

3.2 Étude d’un cas pratique

L’échographie fig.5a résulte, entre autres, de l’analyse des signaux suivant la ligne de tir Ox représentée. Le signal non interprété comme image est donné fig.5b.

3.2.1 Valeur efficace d’un signal $s(t)$ périodique de période T :

$$s_{\text{eff}} = \sqrt{\langle s(t)^2 \rangle} = \frac{1}{T} \int_0^T s^2(t) dt$$

Pour un signal harmonique alternatif, $p_{\text{eff}} = \frac{p_1}{\sqrt{2}}$.

3.2.2 Profondeur h du tissu noté X sur l’image.

Le retard Δt à la propagation de l’écho s’écrit :

$$\Delta t = \frac{2h}{c_s} \Leftrightarrow h = \frac{c_s \Delta t}{2}$$

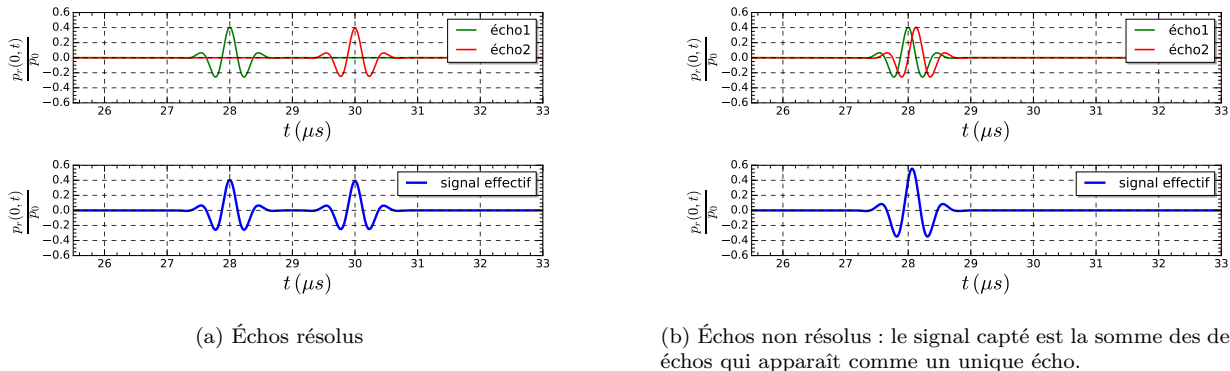


FIGURE 6 – Résolution longitudinale de la sonde échographique

A.N. : graphiquement $\Delta t = 28 \times 10^{-6}$ s et en assimilant les tissus mous à de l’eau $c_s = 1,50 \times 10^3$ m · s⁻¹ donne $h = 2,1$ cm.

3.2.3 Les deux sources essentielles d’incertitudes sur la mesure de h sont la valeur approximative prise pour la célérité c_s des ondes sonores et la durée τ l’impulsion. C’est elle qui intervient dans la résolution longitudinale de la sonde. On suppose que deux échos sont distincts si la durée δt qui les sépare est supérieure à la durée τ d’une impulsion (fig.6) :

$$\delta t > \tau$$

Comme $\delta t = \frac{2x}{c_s}$ où x est la distance entre les deux cibles échogènes, alors la condition s’écrit spatialement :

$$\frac{2x}{c_s} > \tau \Leftrightarrow x > \epsilon \quad \text{avec} \quad \epsilon = \frac{c_s \tau}{2}$$

A.N. : la résolution longitudinale vaut $\epsilon = 0,75$ mm.

3.2.4 Amplitude de l’écho et nature du tissu X.

3.2.4.1 Coefficient de réflexion à l’interface *air/tissus mous*.

$$r_{\text{air/tm}} = \frac{Z_{\text{air}} - Z_{\text{tm}}}{Z_{\text{air}} + Z_{\text{tm}}}$$

A.N. : $r = -99,95$ %.

Si on n’intercale pas un gel entre la sonde et la peau, il existe un film d’air qui réfléchit l’onde incidente de façon quasi-totale rendant la technique d’imagerie inopérante.

3.2.4.2 Compte tenu de l’atténuation :

$$p(x, t) = p_0 e^{-\beta x} e^{-(t-x/c_s)^2/\tau^2} \cos(\omega t - kx)$$

3.2.4.3 $d = \frac{1}{\beta}$. Dimensionnellement, $[\beta x] = \emptyset$ donc $[\beta] = L^{-1}$ et donc $[d] = L$. On en déduit que d est la longueur caractéristique d’atténuation de l’onde au cours de la propagation.

A.N. : $d = \frac{1}{\alpha} f$ avec $\alpha \approx 5,75 \times 10^{-6}$ Hz⁻¹ · m⁻¹ et $f = 2$ MHz donne $d = 8,7$ cm.

3.2.4.4 Pour établir le diagnostic, déterminons la nature du tissu X par mesure de son impédance. On observe que l’écho émis par le tissu X est atténué d’un facteur x par rapport à l’onde émise.

$$x = \frac{p_{\text{rm}}}{p_0} = 0,4$$

avec p_{rm} la maximum de l’écho en $x = 0$.

L’atténuation de l’écho à deux origines :

— l’atténuation de propagation sur une distance $2h$: $e^{-2\beta h}$,

— l'atténuation par réflexion à l'interface tissus mous/tissus X : $r = \frac{Z_{\text{tm}} - Z_X}{Z_{\text{tm}} + Z_X}$ où Z_X est l'impédance du tissu X.

On en déduit que l'amplitude de l'écho en $x = 0$ vaut :

$$p_{\text{rm}} = \frac{Z_{\text{tm}} - Z_X}{Z_{\text{tm}} + Z_X} e^{-2\beta h} p_0$$

Soit :

$$x = \frac{Z_{\text{tm}} - Z_X}{Z_{\text{tm}} + Z_X} e^{-2\beta h}$$

On isole Z_X :

$$Z_X = Z_{\text{tm}} \frac{1 + e^{2\beta h} x}{1 - e^{2\beta h} x}$$

A.N. : $Z_X = 7,6 \times 10^6 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$.

Z_X est très proche de l'impédance moyenne des os donc on peut penser raisonnablement que le patient souffre d'une calcification.

- 3.2.4.5 L'*ombre acoustique* observée derrière la calcification résulte de la transmission très faible de l'onde incidente puis des échos par le tissu X, chacune et chacun ayant à franchir une interface tissus mous/os et une interface os/tissus mous.