



# DS2 – PHYSIQUE-CHIMIE – CORRIGÉ

D.Malka – MPSI 2019-2020 – Lycée Jeanne d'Albret

12.10.19

## Problème 1 - Ondes sismiques

### 1. Onde de compression dans un solide.

1.1 *Raideur* de la poutre.

Le document donne la loi de Hooke :  $F_d = ES \frac{L - L_0}{L_0}$ .

La tension d'un ressort peut s'écrire :  $F = k(L - L_0)$ .

On peut donc définir la raideur de la poutre par  $k = \frac{ES}{L_0}$

Dimension et l'unité légale de son module d'Young? Loi de Hooke montre que  $[F_d] = [E][S]$ . Or  $[F_d] = MLT^{-2}$  et  $[S] = L^2$  donc :

$$[E] = ML^{-1}T^{-2}$$

L'unité légale du module d'Young est le  $kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-2}$ .

1.2 On note  $\psi(x, t)$  l'onde de

compression susceptible de se propager le long de la poutre. L'onde  $\psi(x, t)$  vérifie l'équation d'onde :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \frac{E}{\mu} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0$$

1.2.1 Analyse dimensionnelle de  $c = \sqrt{\frac{E}{\mu}}$  :

$$[c] = \left( \frac{[E]}{[\mu]} \right)^{1/2}$$

avec  $[\mu] = M \cdot L^{-3}$  :

$$[c] = \left( \frac{ML^{-1}T^{-2}}{[M \cdot L^{-3}]} \right)^{1/2} = L \cdot T^{-1}$$

$c$  est donc une vitesse. On peut supposer raisonnablement que c'est la célérité des ondes de compression dans le solide.

1.2.2 Pour le granit :  $\mu = d\rho_{\text{eau}} = 2,4 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  et  $E = 6 \times 10^{10} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$  donne  $c = 5,0 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

1.3 Solution générale en ondes progressives de l'équation d'onde :

$$\psi(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct)$$

### 2. Vibrations propres de la Terre.

On cherche une solution à l'équation d'onde sous la forme :

$$\psi(x, t) = A \cos(\omega t - kx) + B \cos(\omega t + kx) \quad (*)$$

2.1 Période spatiale  $\lambda$  de  $A \cos(\omega t - kx)$ .

$\lambda$  est la plus petite valeur telle que :

$$\forall t, \forall x, A \cos(\omega t - k(x + \lambda)) = A \cos(\omega t - kx)$$

$$\Leftrightarrow k\lambda = 2\pi$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\lambda = \frac{2\pi}{k}}$$

Période temporelle  $T$  de  $A \cos(\omega t - kx)$ .

$T$  est la plus petite valeur telle que :

$$\forall t, \forall x, A \cos(\omega(t + T) - kx) = A \cos(\omega t - kx)$$

$$\Leftrightarrow \omega T = 2\pi$$

$$\Leftrightarrow \boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}}$$

Idem pour  $B \cos(\omega t + kx)$ .

2.2 A quelle condition sur  $k$  et  $\omega$ , (\*) est-elle solution de l'équation d'onde ?

On calcule le membre de gauche et le membre de gauche de l'équation d'onde :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -\omega^2 (A \cos(\omega t - kx) + B \cos(\omega t + kx))$$

$$c^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = -k^2 c^2 (A \cos(\omega t - kx) + B \cos(\omega t + kx))$$

Donc

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \frac{E}{\mu} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \omega^2 = k^2 c^2$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\omega = kc}$$

2.3 Montrons que :

$$\psi(x, t) = 2A \cos(\omega t) \cos(kx)$$

où  $k$  et  $\omega$  ne peuvent prendre qu'un nombre discret de valeurs qu'on donnera.

Cette forme en onde stationnaire et la discrétisation des modes de vibrations résultent des conditions aux limites.

— Condition en  $x = 0$  :

$$\forall t, \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)_{x=0} = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall t, (kA \cos(\omega t - kx) - kB \cos(\omega t + kx))_{x=0} = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{B = A}$$

$$\text{D'où } \psi(x, t) = A(\cos(\omega t - kx) + \cos(\omega t + kx)) = 2A \cos(\omega t) \cos(kx)$$

— Condition en  $x = L$  :

$$\forall t, \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)_{x=L} = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall t, -2A \cos(\omega t) \sin(kL) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin(kL) = 0$$

$$\Leftrightarrow kL = n\pi, n \in \mathbb{N}^*$$

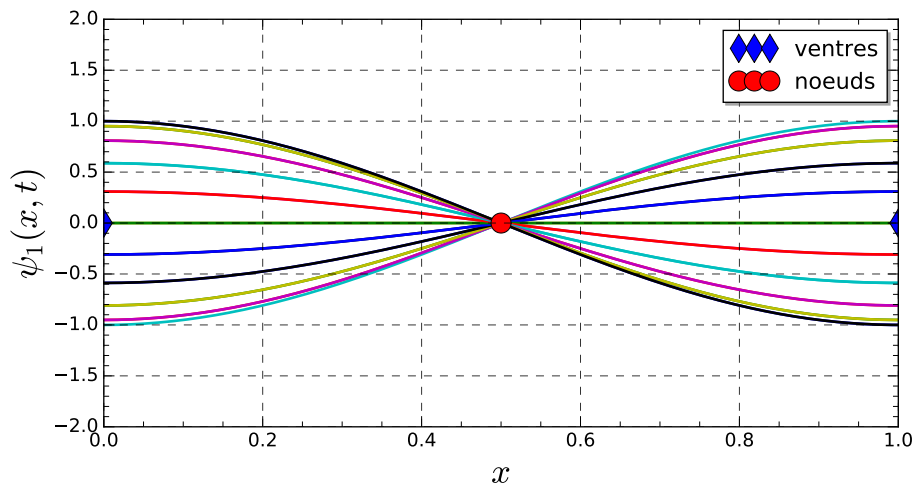
$$\Leftrightarrow \boxed{k_n = \frac{n\pi}{L}, n \in \mathbb{N}^*}$$

On en déduit via  $\omega = kc$  que les seules pulsations de vibrations s’écrivent :

$$\omega_n = \frac{n\pi c}{L}$$

2.4 Dans la forme  $\psi(x, t) = 2A \cos(\omega t) \cos(kx)$ , le temps et l’espace sont découplés : on reconnaît une onde stationnaire, ici harmonique.

2.5 Mode fondamental de vibration de la poutre  $f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{c}{2L}$ .



2.6 Une vibration quelconque de la poutre s’écrit comme la superposition des modes propres de vibration avec des amplitudes  $a_n$  et des phases  $\phi_n$  quelconque :

$$\boxed{\psi(x, t) = \sum_n a_n \cos(k_n x) \cos(\omega_n t + \phi_n)}$$

2.7 On assimile la Terre à une poutre de longueur  $L = 2R_T$  où  $R_T \approx 6,4 \times 10^3$  km est le rayon de la Terre. Estimation de la fréquence fondamentale de vibration de la Terre :  $f_1 = \frac{c}{2L} = \frac{c}{4R_T}$ . On suppose aussi que la Terre est exclusivement constituée de granit d’où  $c \sim 5 \times 10^3$  m · s<sup>-1</sup>. Alors  $f_1 \sim 0,2$  mHz.

### 3. Théorie des rais.

#### 3.1 Positionnement et datation d’un séisme par la méthode des S-P

3.1.1 Montrons que la connaissance de ces deux instants permet de déterminer la date, notée  $t_0$ , du début du séisme et la distance, notée  $\Delta_1$ , entre le foyer du séisme et ce premier sismographe.

$$\begin{cases} \Delta_1 = v_p(t_{P1} - t_0) & \text{Onde P (1)} \\ \Delta_1 = v_s(t_{S1} - t_0) & \text{Onde S (2)} \end{cases}$$

(1) – (2) donne :

$$t_0 = \frac{v_S t_{S1} - v_P t_{P1}}{v_P - v_S}$$

En substituant  $\Delta_1$  dans une des deux équations :

$$\Delta_1 = \frac{v_S v_P}{v_S - v_P} (t_{P1} - t_{S1})$$

### 3.1.2 Position du foyer.

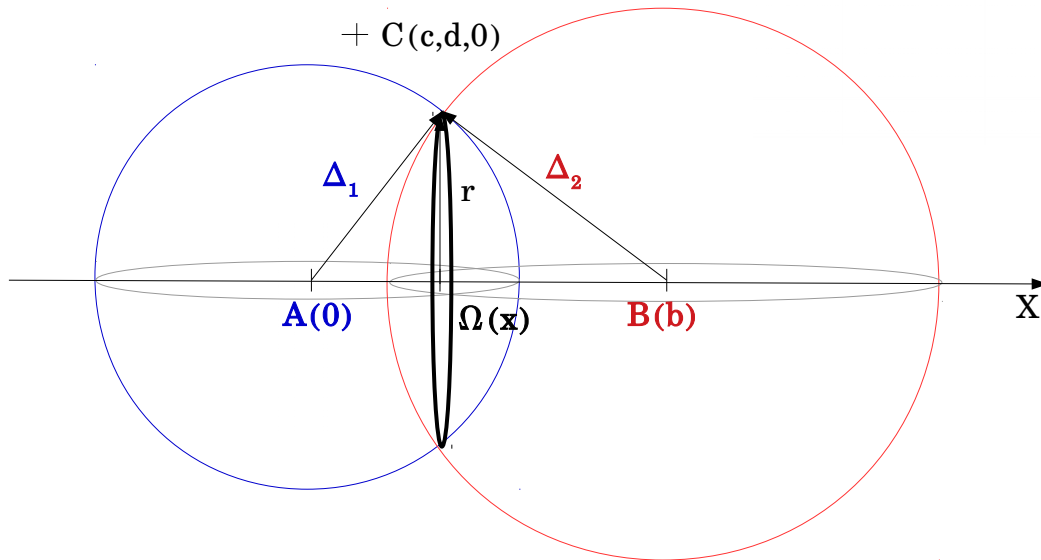


FIGURE 1 – Localisation du foyer d’un séisme par triangulation

Le foyer  $E$  du séisme est à une distance  $\Delta_1$  du point  $A$  donc appartient à la sphère de centre  $A$  et de rayon  $\Delta_1$ . Le foyer  $E$  du séisme est à une distance  $\Delta_2$  du point  $B$  donc appartient à la sphère de centre  $B$  et de rayon  $\Delta_2$ .  $E$  appartient donc à l’intersection de ces deux sphères qui est le cercle de rayon  $r$ , de centre  $\Omega(x, 0, 0)$  et d’axe  $Ax$ .

Calculons  $r$  et  $x$ . La figure 1 fait apparaître deux triangles rectangles pour lesquels le théorème de Pythagore donne :

$$\begin{cases} r^2 + x^2 = \Delta_1^2 & (1) \\ r^2 + (b-x)^2 = \Delta_2^2 & (2) \end{cases}$$

(2) – (1) donne :

$$x = \frac{1}{2b} (b^2 + \Delta_1^2 - \Delta_2^2)$$

puis :

$$r = \sqrt{\Delta_2^2 - \frac{(b^2 + \Delta_1^2 - \Delta_2^2)^2}{4b^2}}$$

Si on calcule que le foyer est à une distance  $\Delta_3$  du point  $C$  alors  $E$  est à l’intersection du cercle de centre  $\Omega$  et de la sphère de centre  $C$  et de rayon  $\Delta_3$ . Cette intersection est le plus souvent constitué de deux points (parfois quatre) qui sont les positions possibles du foyer. En multipliant le nombre de station, on peut localiser de manière univoque la position du foyer.

### 3.2 Mesure de l’épaisseur de la croûte terrestre

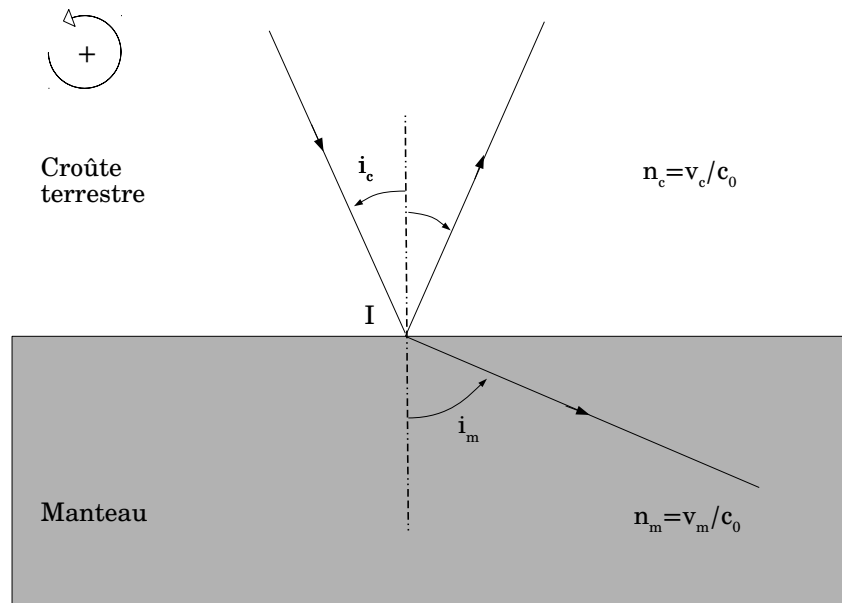


FIGURE 2 – Réflexion et réfraction des raies sismiques à l’interface croûte/manteau

## 3.2.1 Réflexion totale des raies sismiques.

Il existe un rai réfracté si l’angle de réfraction  $i_m$  est défini i.e. :

$$i_m \leq \pi/2$$

$$\Leftrightarrow \sin i_m \leq 1$$

Or, d’après la 4ème loi de Descartes :

$$n_m \sin i_m = n_c \sin i_c$$

D’où :

$$\Leftrightarrow \sin i_c \leq \frac{n_m}{n_c}$$

Il y a donc réflexion totale si :

$$\boxed{\sin i_c > \frac{n_m}{n_c}}$$

Soit encore :

$$\boxed{i_c > i_0 \quad \text{avec} \quad \sin i_0 = \frac{n_m}{n_c} = \frac{v_c}{v_m}}$$

3.2.2 la station  $S$  ne peut détecter l’onde conique qui si elle située au moins à  $\Delta_m$  de  $E$  avec, d’après la fig.3 :

$$\Delta_m = 2H \tan i_0$$

$$\Leftrightarrow \Delta_m = 2H \frac{\sin i_0}{\cos i_0}$$

$$\Leftrightarrow \Delta_m = 2H \frac{\sin i_0}{\sqrt{1 - \sin^2 i_0}}$$

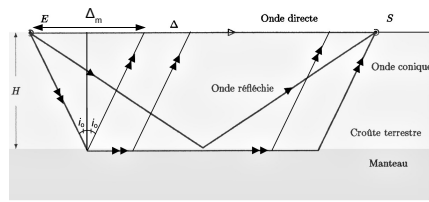


FIGURE 3 – Les différentes ondes se propageant du foyer  $E$  d’un séisme à une station sismographique  $S$ .  $H$  est l’épaisseur de la croûte terrestre,  $\Delta$  la distance entre l’épicentre  $E$  (assimilé au foyer) et la station  $S$ .

or  $\sin i_0 = \frac{v_c}{v_m}$  donc :

$$\Delta_m = 2H \frac{v_c}{\sqrt{v_m^2 - v_c^2}}$$

3.2.3 Émission de l’onde sismique à  $t_0$ , alors :

$$\begin{cases} \Delta = v_c(t_D - t_0) & \text{Onde directe} & (1) \\ 2d = v_c(t_R - t_0) & \text{Onde réfléchie} & (2) \end{cases}$$

avec  $d = \sqrt{H^2 + \Delta^2/4}$

$$\begin{cases} \Delta = v_c(t_D - t_0) & \text{Onde directe} & (1) \\ \sqrt{4H^2 + \Delta^2} = v_c(t_R - t_0) & \text{Onde réfléchie} & (2) \end{cases}$$

Par définition  $\tau = t_R - t_D$ . (2) – (1) donne :

$$\tau = \frac{\sqrt{4H^2 + \Delta^2} - \Delta}{v_c}$$

3.2.4 Une mesure effectuée dans les Alpes donne une valeur de  $\tau = 3,91$  s , pour une distance épacentrale  $\Delta = 105$  km. Épaisseur local  $H$  de la croûte terrestre ?

$$\tau = \frac{\sqrt{4H^2 + \Delta^2} - \Delta}{v_c} \Leftrightarrow H = \frac{1}{2} \sqrt{(v_c \tau + \Delta)^2 - \Delta^2}$$

A.N. :  $v_c = 6,2 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ ,  $\tau = 3,91$  s,  $\Delta = 105$  km donne  $H = 37,6$  km. Ordre de grandeur correct.

3.3 Variation de la vitesse des ondes au sein du manteau.

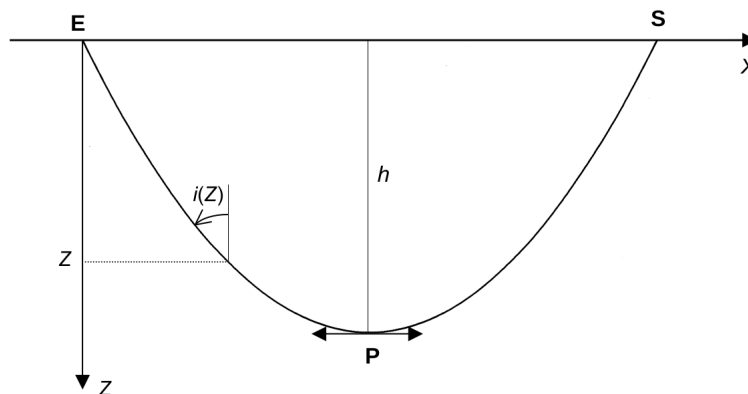


FIGURE 4 – Un rai modélisant la propagation d’une onde sismique au sein du manteau.  $P$  est le point bas du rai.

3.3.1 Voir exercice sur les mirages.  $n(Z) \sin i(Z)$  est indépendant de  $Z$ . Or  $n(Z) = \frac{c_0}{v(Z)}$  donc  $p = \frac{\sin i(Z)}{v(Z)}$  est indépendant de  $Z$ .

Chaque rai étudié ici possède un « point bas » noté  $P$  (voir figure 4), de profondeur notée  $h$  (et dont la valeur est fonction du rai considéré).

3.3.2 Établir une relation entre le paramètre  $p$  d’un rai et la vitesse de propagation des ondes au niveau de son point bas.

$p = \frac{\sin i(Z)}{v(Z)}$  est indépendant de  $Z$  donc est égal en particulier à valeur au point bas :

$$p = \frac{\sin i(P)}{v(P)}$$

Or au point  $P$  le rai est localement horizontal donc  $i(P) = \frac{\pi}{2}$  d’où :

$$p = \frac{1}{v(P)}$$

On considère deux rais issus de  $E$ , infiniment voisins, coupant le sol en deux points  $M$  et  $M'$  (voir la figure 5).

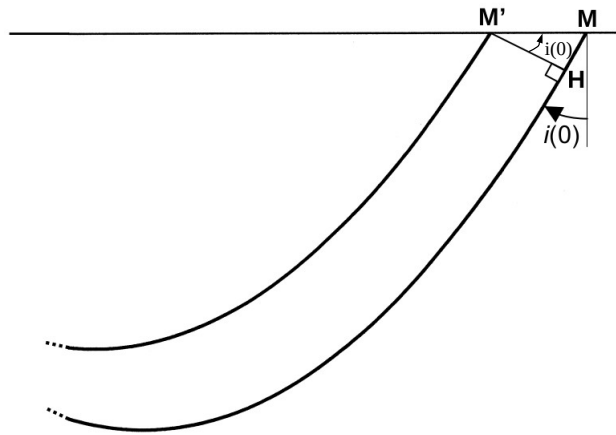


FIGURE 5 – Deux rais émis par  $E$  atteignant la surface en  $M$  et  $M'$ .

3.3.3 Lien entre la « vitesse apparente au sol »  $v_a = \frac{d\Delta}{dt}$  et le paramètre  $p$  du rai passant par le point  $M$ .

Le rai arrivant en  $M$  doit parcourir la distance  $HM$  de plus que le rai arrivant en  $M'$  donc :

$$dt = \frac{HM}{v(0)}$$

Or :

$$HM = MM' \sin i_0 \quad \text{et} \quad v(0) = \frac{\sin i_0}{p}$$

D’où :

$$dt = MM' p$$

or  $MM' = d\Delta$  d’où :

$$v_a = \frac{d\Delta}{dt} = \frac{1}{p}$$

On admet la formule de Herglotz-Wiechert :

$$h(\Delta) = \frac{1}{\pi} \int_{\Delta'=0}^{\Delta'=\Delta} \text{Argch} \left( \frac{v_a(\Delta)}{v_a(\Delta')} \right) d\Delta'$$

On suppose connu le graphe, obtenu expérimentalement, de la fonction  $t(\Delta)$  qui relie le temps de propagation de l’onde (de  $E$  à  $S$ ) à la distance épacentrale  $\Delta = ES$ .

3.3.4 On connaît le graphe  $t(\Delta)$  en ordonnée de  $\Delta$  (mesure). Par définition de la dérivée, la pente en chaque point d’abscisse  $\Delta$  est  $\frac{dt}{d\Delta} = \frac{1}{v_a}$ . Donc on peut déduire la courbe  $v_a(\Delta)$  en ordonné de  $\Delta$ . Utilisant les valeurs de  $v_a(\Delta)$  et la formule de Herglotz-Wiechert, on détermine la profondeur du point bas  $h(\Delta)$  pour chacun des  $\Delta$ . Finalement, on peut tracer  $v_a(\Delta)$  en fonction de  $h(\Delta)$  qui nous donne la fonction  $v(h)$  c’est-à-dire  $v(Z)$ .

### Problème 2 - Le réseau de diffraction

Le réseau de diffraction est un substrat finement strié de fentes (appelées traits) . Il est utilisé essentiellement pour réaliser le spectre d’un rayonnement lumineux.

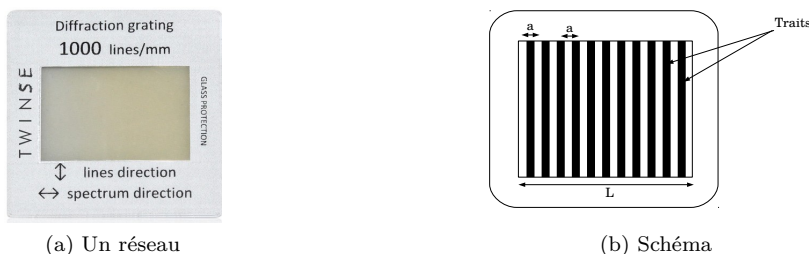


FIGURE 6 – Le réseau de diffraction. Il comprend  $N$  traits de largeur  $a$  et distants de  $a$ .

Le réseau est illuminé par une onde plane monochromatique en incidence normale de longueur d’onde  $\lambda$  donc géométriquement par un faisceau lumineux parallèle.

1. **Une fente.** On considère l’effet d’un seul des traits du réseau sur l’onde incidente (fig.7).

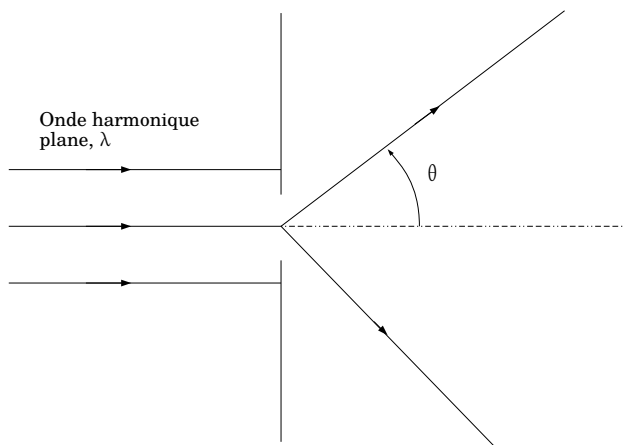


FIGURE 7 – Trait d’un réseau illuminé par une onde plane. (Réseau vu de dessus)

- 1.1 D’après le document, le réseau comprend  $N = 1000$  traits/mm donc  $a \sim \frac{1}{N}$ .
- 1.2 Le faisceau s’élargit par diffraction selon un cône d’angle au sommet  $\alpha \sim \frac{\lambda}{a}$ . Avec  $a \sim \frac{1}{N} \sim 1 \mu\text{m}$  et  $\lambda \sim 1 \mu\text{m}$  (lumière visible),  $\alpha \sim 1$  rad.



2. **Deux fentes.** On considère l’effet de deux traits adjacents du réseau sur l’onde incidente (fig.8). On admet qu’entre les deux rayons, il y a une différence de marche notée  $\delta$  sur le schéma.

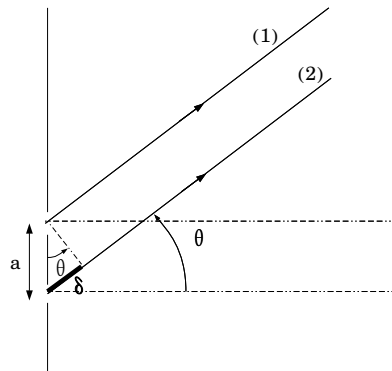


FIGURE 8 – Deux traits adjacents d’un réseau illuminé par une onde plane. (Réseau vu de dessus)

2.1 Au niveau du détecteur placé en aval du réseau, le signal associé au rayon (1) s’écrit  $s_1(t) = s_0 \cos(\omega t)$ . On peut supposer le signal  $s_2(t)$  associé au rayon (2) de même amplitude mais avec un retard  $\tau = \delta/c$  par rapport au rayon (1) soit  $s_2(t) = s_0 \cos(\omega t - \omega \frac{\delta}{c})$  ou encore :

$$s_2(t) = s_0 \cos(\omega t - k\delta)$$

avec  $k = \omega/c$ .

Or  $\delta = a \sin \theta$  d’où :

$$s_2(t) = s_0 \cos(\omega t - ka \sin \theta)$$

2.2 Calculons l’intensité  $I(\theta)$  :

$$I(\theta) = \langle s(t)^2 \rangle$$

avec :

$$s(t) = s_1(t) + s_2(t)$$

$$s(t) = s_0(\cos(\omega t) + \cos(\omega t - ka \sin \theta))$$

$$s(t) = s_0(\cos(\frac{ka}{2} \sin \theta)) \cos(\omega t - \frac{ka}{2} \sin \theta)$$

$$s^2(t) = s_0^2(\cos^2(\frac{ka}{2} \sin \theta)) \cos^2(\omega t - \frac{ka}{2} \sin \theta)$$

D’où :

$$I(\theta) = s_0^2(\cos^2(\frac{ka}{2} \sin \theta)) \langle \cos^2(\omega t - \frac{ka}{2} \sin \theta) \rangle$$

$$I(\theta) = \frac{s_0^2}{2}(\cos^2(\frac{ka}{2} \sin \theta))$$

2.3 Les interférences sont-elles constructives lorsque  $I$  est maximal soit :

$$\cos^2(\frac{ka}{2} \sin \theta) = 1$$

$$\frac{ka}{2} \sin \theta = n$$



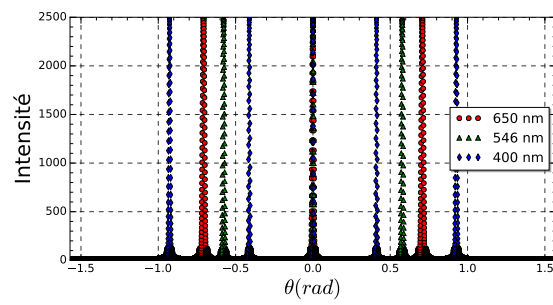


FIGURE 11 – Intensité lumineuse si éclairement par une source polychromatique. Tracé pour  $N = 50$  traits.