



DEVOIR SURVEILLÉ 2 – PHYSIQUE-CHIMIE

D.Malka – MPSI 2019-2020 – Lycée Jeanne d'Albret

12.10.19

Durée de l'épreuve : 3h00

L'usage de la calculatrice est autorisé.

L'énoncé de ce devoir comporte 7 pages.

- La numérotation des exercices doit être respectée.
- Les résultats doivent être systématiquement encadrés.
- Les pages doivent être numérotées de la façon suivante : n° page courante / nombre total de pages.
- Il ne faudra pas hésiter à formuler des commentaires. Le barème tiendra compte de ces initiatives ainsi que des qualités de rédaction de la copie.
- Si, au cours de l'épreuve, vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, signalez le sur votre copie et poursuivez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous êtes amené à prendre.

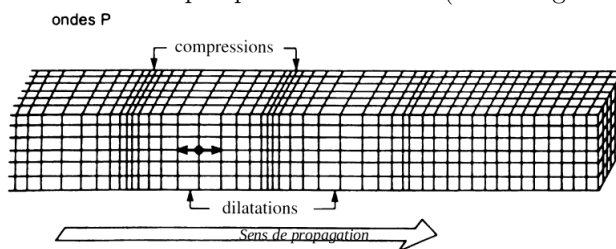
Problème 1 - Ondes sismiques

Les ondes sismiques peuvent être induites de façon naturelle, suite à un tremblement de terre, ou de façon artificielle, à l'aide de charges explosives disposées sous terre. Leurs domaines d'investigation sont nombreux : localisation d'un épicode de tremblement de terre, prospection pétrolière, mesure d'épaisseur de la croûte terrestre... Il existe deux grands types d'ondes sismiques : les ondes de compression (ondes P) et les ondes de cisaillement (onde S) (doc.1).

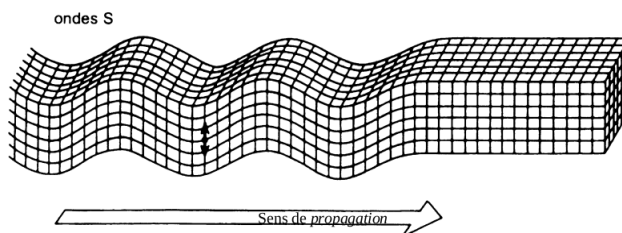
Document 1 – Ondes sismiques

Le passage d'une onde sismique à l'intérieur d'un milieu solide peut-y induire localement deux types de déformations :

- une compression ou un étirement (déformation du milieu qui se fait parallèlement au sens de propagation de l'onde) provoqué par une onde sismique qualifiée d'onde P (onde longitudinale).

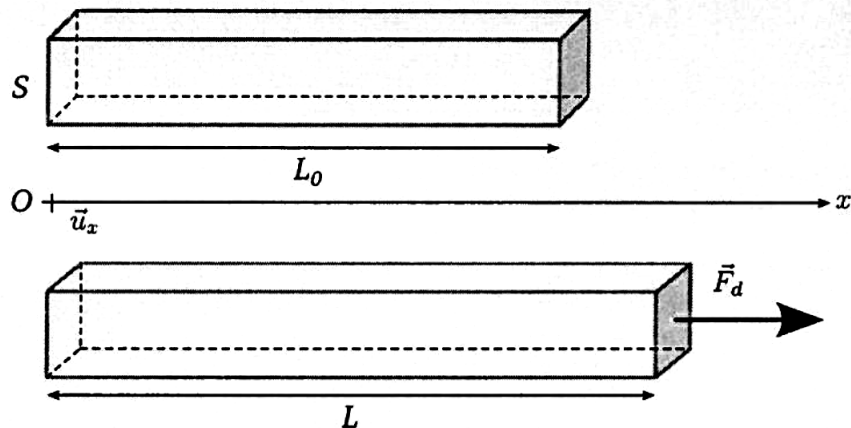


- une cisaillement (déformation du milieu qui se fait perpendiculairement au sens de propagation de l'onde) provoqué par une onde sismique qualifiée d'onde S (onde transversale).



Document 2 – Élasticité d’un solide

Soit une poutre, de longueur au repos L_0 , fixée en son extrémité gauche. On décide de comprimer ou d’étirer la poutre en l’amenant jusqu’à la longueur L :



L’expérience montre alors que pour des petites déformations, il faut appliquer sur la section S située à droite une force \vec{F}_d telle que :

$$\vec{F}_d = ES \frac{L - L_0}{L_0} \vec{u}_x \quad (R)$$

où $\frac{L - L_0}{L_0}$ est l’allongement relatif de la poutre et E est une constante positive appelée le *module d’Young*. la relation (R) est connue sous le nom de loi de Hooke.

1. Onde de compression dans un solide.

L’étude sera réalisée à une dimension, sur une poutre solide, homogène, d’axe Ox , de section S constante et de masse volumique μ constante dont la déformation est expliquée dans le document 2.

- 1.1 Proposer une expression pour la *raideur* de la poutre. Donner la dimension et l’unité légale de son module d’Young.
- 1.2 On note $\psi(x, t)$ l’onde de compression susceptible de se propager le long de la poutre. L’onde $\psi(x, t)$ vérifie l’équation d’onde :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \frac{E}{\mu} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0$$

1.2.1 Donner le sens physique de $c = \sqrt{\frac{E}{\mu}}$ vis-à-vis de l’onde.

1.2.2 Estimer la valeur de c pour du granit, de densité $d = 2,4$ et de module d’Young $E = 6 \times 10^{10} \text{ S} \cdot \text{I}$.

- 1.3 La solution générale de l’équation d’onde est la superposition d’une onde progressive vers les x croissant et d’une onde progressive vers les x décroissant. Écrire formellement cette solution en faisant apparaître la célérité de l’onde.

2. Vibrations propres de la Terre.

Dans cette partie, on s’intéresse aux vibrations libres de la poutre puis on extrapole les résultats à la Terre. l’absence de contraintes aux extrémité $x = 0$ et $x = L$ impliquent la nullité des dérivées spatiales de $\psi(x, t)$ en ce points :

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)_{x=0} = 0 \quad \text{et} \quad \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)_{x=L} = 0$$

On cherche une solution à l’équation d’onde sous la forme :

$$\psi(x, t) = A \cos(\omega t - kx) + B \cos(\omega t + kx) \quad (*)$$

- 2.1 Montrer que $A \cos(\omega t - kx)$ et $B \cos(\omega t + kx)$ sont périodiques dans l’espace et dans le temps. Exprimer la période spatiale λ et la période temporelle T .
- 2.2 A quelle condition sur k et ω , (*) est-elle solution de l’équation d’onde ?
- 2.3 Montrer que :

$$\psi(x, t) = 2A \cos(\omega t) \cos(kx)$$

où k et ω ne peuvent prendre qu’un nombre discret de valeurs qu’on donnera.

- 2.4 Comment s’appelle le type d’onde de la question précédente ?
- 2.5 Représenter à différents instants la forme d’onde correspondant à la vibration de plus basse fréquence de la poutre. Indiquer les nœuds et les ventres.
- 2.6 Comment s’écrit l’expression la plus générale de la vibration de la poutre. Donner l’allure du spectre correspondant.
- 2.7 Un séisme violent peut mettre en vibration la planète toute entière. En extrapolant le modèle de la poutre à la Terre, estimer numériquement la fréquence fondamentale de vibration de la Terre.
- 3. Théorie des rais.**

Dans cette partie, on décrit les ondes sismiques selon la théorie des rais, analogue à la description des ondes lumineuses dans l’approximation de l’optique géométrique. Ainsi, on appelle *rai* l’équivalent du rayon lumineux en optique. Cette théorie est adoptée pour :

- localiser et dater un séisme,
- mesurer l’épaisseur de la croûte terrestre,
- sonder le manteau.

3.1 Positionnement et datation d’un séisme par la méthode des S-P

Dans cette question, on cherche à positionner et à dater un séisme qui vient d’avoir lieu à faible profondeur ; on considère que, dans ces conditions, les ondes sismiques se propagent du foyer du séisme jusqu’aux capteurs (sismographes) de façon rectiligne, avec des vitesses de propagation uniformes - et supposées connues - v_P pour les ondes P, et v_S pour les ondes S ; on rappelle que v_P est supérieure à v_S . On rappelle aussi que les ondes sismiques se propagent en volume.

On assimile localement la surface terrestre à une portion du plan xOy , l’axe Oz étant vertical ascendant.

Un premier sismographe perçoit les premières ondes P à un instant noté t_{P1} et les premières ondes S à un instant noté t_{S1} .

- 3.1.1 Montrer que la connaissance de ces deux instants permet de déterminer la date, notée t_0 , du début du séisme et la distance, notée Δ_1 , entre le foyer du séisme et ce premier sismographe. On exprimera t_0 et Δ_1 .
- 3.1.2 De la même façon, on peut déterminer les distances, notées Δ_2 et Δ_3 , entre le foyer du séisme et deux autres sismographes. Les trois sismographes sont placés sur le sol en trois points A , B et C non alignés. On choisit l’origine O en A , et l’axe Ox selon AB . On note $(b, 0, 0)$ les coordonnées cartésiennes du point B , et $(c, d, 0)$ celles du point C , celles du point A étant évidemment nulles. On pourra supposer que les trois valeurs b , c et d sont positives.
- 3.1.2.1 Montrer que la connaissance de Δ_1 et Δ_2 permet d’affirmer que le foyer du séisme est situé sur une courbe plane. Préciser l’axe de cette courbe, et la position de son centre en fonction de b , Δ_1 et Δ_2 .
- 3.1.2.2 Montrer sans calcul que la connaissance de b , c , d , Δ_1 , Δ_2 et Δ_3 permet de positionner le foyer du séisme, situé sous la surface terrestre.

Dans la suite, on ne considérera que les ondes P, dont on notera simplement v la vitesse de propagation, par souci d’allègement.

3.2 Mesure de l’épaisseur de la croûte terrestre

Les ondes sismiques vérifient également les lois de Descartes concernant la réflexion et la réfraction. On assimile la séparation « croûte terrestre - manteau » à un dioptré plan. Dans la croûte terrestre la vitesse de propagation des ondes est notée v_C , dans le manteau elle est notée v_m , et on suppose que v_m est supérieure à v_C . On introduit, pour chaque milieu, l’indice sismique, qui joue un rôle équivalent à celui de l’indice optique. On note $n_C = c_0/v_C$ l’indice sismique de la croûte terrestre, et $n_m = c_0/v_m$ l’indice sismique du manteau, c_0 étant une vitesse de référence.

3.2.1 Un rai sismique incident provenant de la croûte terrestre arrive au dioptre croûte-manteau sous l’angle d’incidence i_C positif. Montrer qu’il existe une valeur limite, notée i_0 , de l’angle i_C au delà de laquelle la réfraction n’est plus possible. Exprimer i_0 en fonction de v_C et de v_m .

Lorsqu’un séisme a lieu en un point E (qu’on suppose en surface, pour simplifier l’étude), le sismographe placé en S enregistre, pour le seul type d’onde considéré (ondes P), 2 ou 3 signaux (voir fig.1) : une onde directe, une onde réfléchie et, dans certaines conditions étudiées dans la suite, une onde nommée « conique », qu’on peut décrire ainsi : le rai incident frappant le dioptre avec l’angle limite i_0 donne un émergent qui rase, à la vitesse v_m , la surface de séparation dans le manteau ; cet émergent rasant émet dans la croûte des rais émissaires, sous l’angle d’émergence i_0 , qui se propagent à la vitesse v_C .

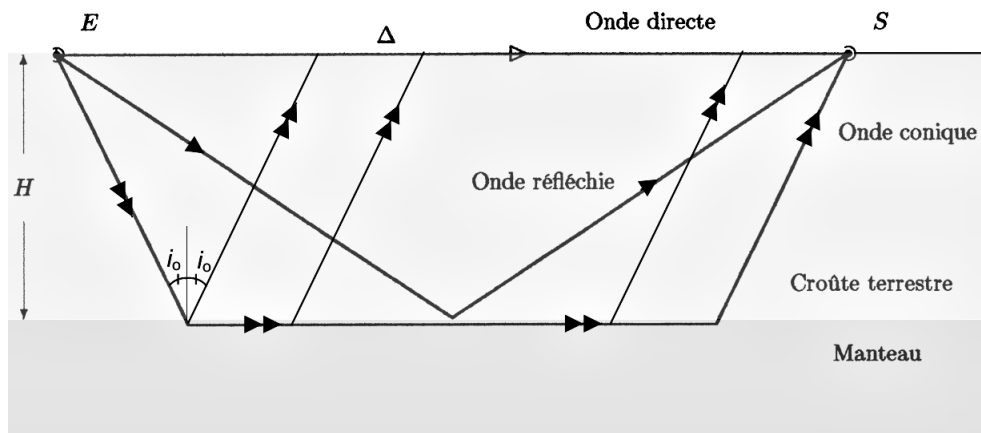


FIGURE 1 – Les différentes ondes se propageant du foyer E d’un séisme à une station sismographique S . H est l’épaisseur de la croûte terrestre, Δ la distance entre l’épicentre E (assimilé au foyer) et la station S .

- 3.2.2 Déterminer, en fonction de H et de l’angle limite i_0 introduit à la question précédente, la valeur minimale, notée Δ_m , de la distance épacentrale Δ pour que le sismographe placé en S puisse détecter l’onde conique.
- 3.2.3 Établir, dans le cas où $\Delta > \Delta_m$, la relation entre la profondeur de la croûte terrestre H et la durée τ qui sépare les arrivées en S d’une onde directe et d’une onde réfléchie.
- 3.2.4 Une mesure effectuée dans les Alpes donne une valeur de $\tau = 3,91$ s, pour une distance épacentrale $\Delta = 105$ km. En déduire la valeur numérique de la profondeur H , sachant que la vitesse sismique dans la croûte terrestre est, dans la région, de l’ordre de $6,2 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$.

3.3 Variation de la vitesse des ondes au sein du manteau

L’étude de la propagation des ondes sismiques dans la partie lithosphérique du manteau permet d’obtenir de précieux renseignements.

On assimile encore la surface terrestre à une portion du plan XOY , l’axe OZ étant vertical descendant (voir la figure 2).

On considère qu’à l’échelle de l’étude (profondeur de l’ordre de plusieurs dizaines de kilomètres), on peut faire abstraction de l’épaisseur de l’écorce terrestre ; on suppose que la vitesse des ondes sismiques est, pour toute direction de propagation, une fonction $v(Z)$ continue et croissante - que l’on cherche à caractériser - de la profondeur notée Z .

On note Δ la distance épacentrale : $\Delta = ES$. On étudie les rais situés dans le plan EXZ . S est placé sur l’axe EX .

- 3.3.1 En assimilant la partie étudiée du manteau à un empilement de différentes strates telles que $v'' > v' > v$, montrer que la valeur absolue de la quantité $p = \frac{\sin(i(Z))}{v(Z)}$ est constante, pour un rai donné. On nomme paramètre du rai et note p cette valeur absolue, qui est fonction du rai considéré.

Chaque rai étudié ici possède un « point bas » noté P (voir figure 2), de profondeur notée h (et dont la valeur est fonction du rai considéré).

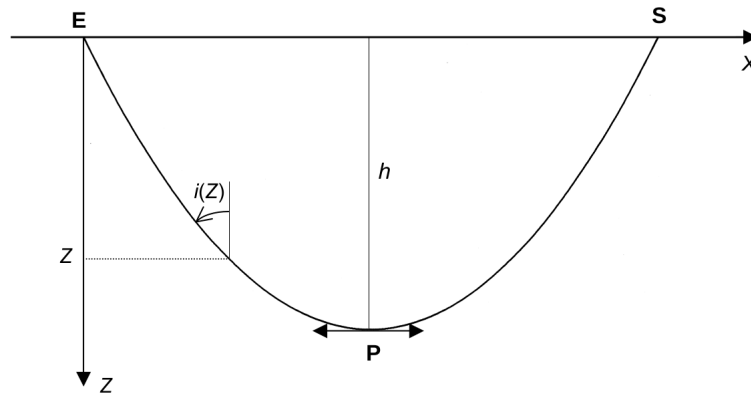


FIGURE 2 – Un rai modélisant la propagation d’une onde sismique au sein du manteau. P est le point bas du rai.

3.3.2 Établir une relation entre le paramètre p d’un rai et la vitesse de propagation des ondes au niveau de son point bas.

On considère deux rais issus de E , infiniment voisins, coupant le sol en deux points M et M' (voir la figure 3).

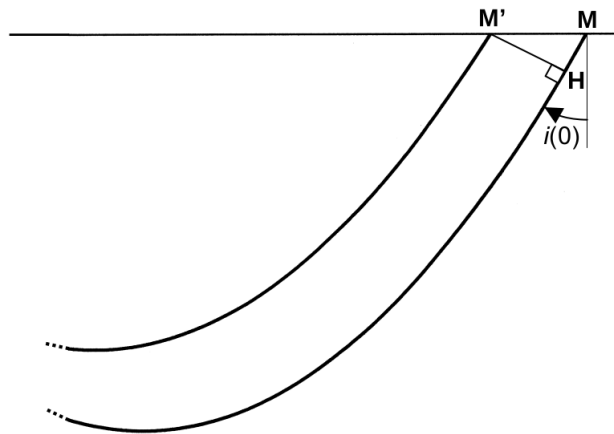


FIGURE 3 – Deux rais émis par E atteignant la surface en M et M' .

On note Δ la distance épacentrale du point M , et $(\Delta - d\Delta)$ celle du point M' ; $d\Delta$ est un infiniment petit.

On admet que le point M' et le point H , projeté orthogonal de M' sur le rai passant par M , perçoivent simultanément l’onde sismique émise par E .

On note dt le temps (très court) entre les perceptions de l’onde en M' et en M , et $i(0)$ l’angle d’incidence, en $Z = 0$, du rai coupant le sol en M .

La portion de rai entre H et M peut ici être assimilée à sa tangente en M .

3.3.3 Établir le lien entre la « vitesse apparente au sol » $v_a = \frac{d\Delta}{dt}$ et le paramètre p du rai passant par le point M .

On admet la formule de Herglotz-Wiechert :

$$h(\Delta) = \frac{1}{\pi} \int_{\Delta'=0}^{\Delta'=\Delta} \text{Argch} \left(\frac{v_a(\Delta)}{v_a(\Delta')} \right) d\Delta'$$

On suppose connu le graphe, obtenu expérimentalement, de la fonction $t(\Delta)$ qui relie le temps de propagation de l’onde (de E à S) à la distance épacentrale $\Delta = ES$.

3.3.4 Montrer, sans calcul, qu’il est alors possible de déduire des points du graphe la vitesse de propagation des ondes sismique en fonction de la profondeur $v(Z)$

Problème 2 - Le réseau de diffraction

Le réseau de diffraction est un substrat finement strié de fentes (appelées traits) . Il est utilisé essentiellement pour réaliser le spectre d’un rayonnement lumineux.

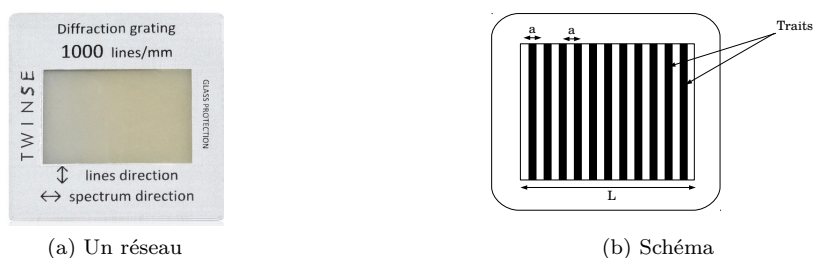


FIGURE 4 – Le réseau de diffraction. Il comprend N traits de largeur a et distants de a .

Le réseau est illuminé par une onde plane monochromatique en incidence normale de longueur d’onde λ donc géométriquement par un faisceau lumineux parallèle.

1. **Une fente.** On considère l’effet d’un seul des traits du réseau sur l’onde incidente (fig.5).

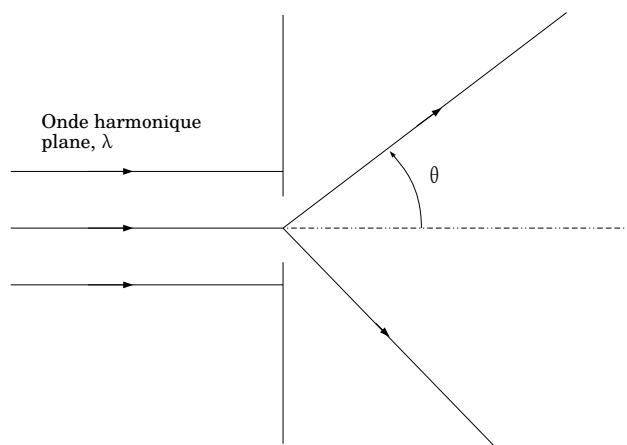


FIGURE 5 – Trait d’un réseau illuminé par une onde plane. (Réseau vu de dessus)

- 1.1 A l’aide des documents, donner un ordre de grandeur de la largeur a des traits.
- 1.2 Expliquer pourquoi en sortie du réseau le faisceau lumineux s’élargit. Estimer l’angle α .
2. **Deux fentes.** On considère l’effet de deux traits adjacents du réseau sur l’onde incidente (fig.6). On admet qu’entre les deux rayons, il y a une différence de marche notée δ sur le schéma.

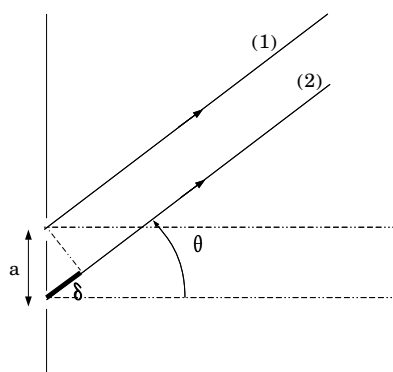


FIGURE 6 – Deux traits adjacents d’un réseau illuminé par une onde plane. (Réseau vu de dessus)

