



## DS3 – PHYSIQUE-CHIMIE – CORRIGÉ

D.Malka – MPSI 2019-2020 – Lycée Jeanne d'Albret

16.11.19

### Problème 1 – Autour de l'eau de Javel

#### 1. L'eau de Javel

L'eau de Javel est une solution aqueuse équimolaire d'ions  $Cl^-$  et  $ClO^-$ . Le degré chlorométrique désigne le nombre de litres de dichlore qui peuvent être libérés par l'addition d'acide chlorhydrique en quantité non limitante à un litre d'eau de Javel dans les conditions normales de température et de pression (273 K, 1,013 bar) suivant la réaction totale :



1.1 Quantité de dichlore libérable par un litre d'eau de Javel commerciale à 48 « degrés chlorométriques ».

$$n_{Cl_2} = \frac{V_{Cl_2}}{V_m}$$

avec  $V_m$  le volume molaire dont on connaît la valeur (22,4L) où dont on peut calculer la valeur à l'aide de l'équation d'état du gaz parfait :

$$V_m = \frac{V}{n} = \frac{RT}{P}$$

A.N. :  $P = 1,013 \text{ bar} = 1,013 \times 10^5 \text{ Pa}$  et  $T = 273 \text{ K}$  donne  $V_m = 22,4 \text{ L}$ .

On en déduit :  $n_{Cl_2} = \underline{2,14 \text{ mol}}$ .

1.2 Concentration en  $\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$  en ions  $ClO^-$  de cette eau de Javel.

D'après l'équation-bilan, la quantité de matière de dichlore formée est égale à la quantité de matière d'ions hypochlorite qui a disparue. La réaction étant totale, la quantité de matière d'ions hypochlorite qui a disparue est celle présente initialement donc :

$$n_{ClO^-,0} = n_{Cl_2}$$

et donc pour  $V = 1 \text{ L}$  :

$$[ClO^-]_0 = \frac{n_{Cl_2}}{V}$$

A.N. :  $[ClO^-]_0 = \underline{2,14 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}}$ .

#### 2. Décontamination des eaux de piscine par l'eau de Javel

2.1 Déterminons le volume d'eau de Javel commerciale à verser dans le bassin pour apporter 10 mg d'ions  $ClO^-$  par litre d'eau.

Cela signifie que la concentration massique  $t$  en ions  $ClO^-$  doit être égale à  $10 \text{ mg} \cdot \text{L}^{-1}$ . Or

$$t = \frac{m_{ClO^-}}{V_b}$$

avec :

$$m_{ClO^-} = n_{ClO^-} M_{ClO^-}$$

La quantité de matière  $n_{ClO^-}$  est apportée à l’eau par adjonction d’un volume  $V_j$  d’eau de Javel de concentration  $c_j = 2,14 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ . D’où :

$$n_{ClO^-} = c_j V_j$$

et donc :

$$t = \frac{c_j V_j M_{ClO^-}}{V_b}$$

soit :

$$V_j = \frac{t V_b}{c_j M_{ClO^-}}$$

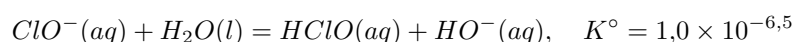
A.N. :  $V_j = 5,44 \text{ L}$ .

2.2 Concentration résiduelle en  $[ClO^-]_i$  ions hypochlorite.

$$[ClO^-]_i = 90\% \frac{t}{M_{ClO^-}}$$

A.N. :  $[ClO^-]_i = 1,94 \times 10^{-5} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ .

2.3 L’ion  $ClO^-$  est une base et réagit donc avec l’eau suivant l’équation de réaction :



Déterminer la concentration en  $HClO$  à l’équilibre revient à déterminer l’état final du système. On réalise un bilan de matière en dressant un tableau d’avancement puis en appliquant la loi d’action de masse (réaction très limitée car  $K^\circ \ll 1 \times 10^{-4}$ ). Le volume du système ne variant pas au cours du temps, on peut raisonner en avancement volumique  $x$ .

| $x$   | $ClO^-(aq)$       | $+H_2O(l)$ | $= HClO(aq)$ | $+HO^-(aq)$ |
|-------|-------------------|------------|--------------|-------------|
| 0     | $[ClO^-]_i$       | excès      | 0            | 0           |
| $x_f$ | $[ClO^-]_i - x_f$ | excès      | $x_f$        | $x_f$       |

Loi d’action de masse appliqué à cette équilibre :

$$Q_{eq} = K^\circ$$

$$\text{avec } Q_{eq} = \frac{[HClO]_{eq}[HO^-]_{eq}}{[ClO^-]_{eq}c^\circ}$$

d’où :

$$\frac{[HClO]_{eq}[HO^-]_{eq}}{[ClO^-]_{eq}c^\circ} = K^\circ$$

$$\Leftrightarrow \frac{x_f^2}{([ClO^-]_i - x_f)c^\circ} = K^\circ$$

Comme  $K^\circ \ll 10 \times 10^{-4}$ , on peut faire l’approximation que l’avancement est négligeable devant la concentration initiale en réactif :  $[ClO^-]_i - x_f \approx [ClO^-]_i$ , et ainsi s’épargner la résolution d’une équation du second degré.

$$\Rightarrow \frac{x_f^2}{[ClO^-]_i c^\circ} \approx K^\circ$$

$$\Leftrightarrow x_f \approx \sqrt{K^\circ c^\circ [ClO^-]_i}$$

A.N. :  $x_f = 2,48 \times 10^{-6} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$

☞  $x_f \ll [ClO^-]_i$ , donc l’approximation  $[ClO^-]_i - x_f \approx [ClO^-]_i$  n’est pas absurde.

On en déduit  $[HClO]_{eq} = 2,48 \times 10^{-6} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ . De même  $[HO^-]_{eq} = 2,48 \times 10^{-6} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$

2.4 Sachant que :



Déterminons le  $pH$  de la solution à l’équilibre.

La réaction des ions  $ClO^-$  crée des ions  $HO^-$  ce qui modifie la concentration en ions  $H_3O^+$  via l’équilibre d’autoprotolyse de l’eau. En appliquant la loi d’action de masse à l’autoprotolyse de l’eau, il vient :

$$\frac{[H_3O^+]_{eq}[HO^-]_{eq}}{(c^\circ)^2} = K_e$$

avec  $[HO^-]_{eq} \approx 2,48 \times 10^{-6} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$  car la réaction est très limitée dans le sens direct.

D’où :

$$[H_3O^+]_{eq} = \frac{K_e}{[HO^-]_{eq}} (c^\circ)^2$$

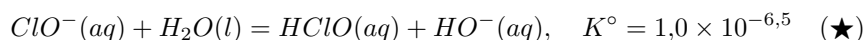
et donc ; sachant que  $pH = -\log\left(\frac{[H_3O^+]_{eq}}{c^\circ}\right)$  :

$$pH = -\log K_e - \log\left(\frac{c^\circ}{[HO^-]_{eq}}\right)$$

A.N. :  $pH = 8,4$

La solution est basique. Le contraire eût été surprenant puisqu’on ajouté une base à de l’eau pure.

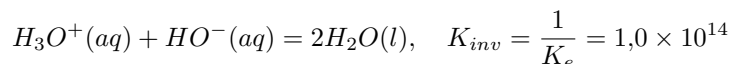
2.5 Considérons la réaction :



Initialement ( $pH = 8,4$ ), le système est à l’équilibre et donc :

$$Q_{eq} = K^\circ$$

L’ajout d’ions  $H_3O^+$  consomme des ions  $HO^-$  via la réaction quantitative :



Alors le quotient réactionnel relatif à  $(\star)$  diminue. Alors, juste après l’ajout d’acide :

$$Q < K^\circ$$

Le système évolue vers un nouvel état d’équilibre de façon à ce que  $Q \rightarrow K^\circ$ . Donc  $Q$  augmente donc la concentration en acide hypochloreux augmente.

## Problème 2 - Le microscope

### 1. Modélisation du microscope

#### 1.1 L’objectif

1.1.1 Voir figure 5.

1.1.2 Définir puis calculer le grandissement  $\gamma_1$  de cette lentille en fonction de  $f'_1$  et  $p_1 = \overline{O_1A}$ .

$$\gamma_1 = \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{AB}}$$

La figure 5 montre que (trigonométrie élémentaire) :

$$\gamma_1 = \frac{\overline{O_1A_1}}{\overline{O_1A}} = \frac{\overline{O_1A_1}}{p_1}$$

avec d’après la relation de conjugaison :

$$-\frac{1}{\overline{O_1A}} + \frac{1}{\overline{O_1A_1}} = \frac{1}{f'_1}$$

$$\overline{O_1A_1} = \frac{f'_1 p_1}{f'_1 + p_1}$$

Ce qui donne :

$$\gamma_1 = \frac{f'_1}{f'_1 + p_1}$$

1.1.3  $AB$  objet réel donc  $p_1 = \overline{O_1A} < 0$ .

— Image réelle si  $\overline{O_1A_1} > 0$ . Or d’après la relation de conjugaison :

$$\frac{1}{\overline{O_1A_1}} = -\frac{1}{\overline{O_1A}} + \frac{1}{f'_1}$$

donc

$$\overline{O_1A_1} > 0 \Leftrightarrow p_1 < -f'_1$$

— Image agrandie si  $|\gamma_1| > 1$  soit comme  $\gamma_1 < 0$ ,  $|\gamma_1| < -1$ . Or  $\gamma_1 = \frac{f'_1}{f'_1 + p_1}$  d’où :

$$\frac{f'_1}{f'_1 + p_1} < -1$$

et comme  $p_1 + f'_1 < 0$  :

$$\Leftrightarrow f'_1 > -f'_1 - p_1 \Leftrightarrow p_1 > -2f'_1$$

Finalement l’image de l’objet  $AB$  par l’objectif est réelle et agrandie à condition que  $-2f'_1 < p_1 < -f'_1$ .

## 1.2 L’oculaire

1.2.1 Sans accommoder, l’œil sain voit net les objet à l’infini. Comme  $A_2B_2$  est un objet vis-à-vis de l’œil, il faut que l’image finale par le microscope se forme à l’infini. Pour cela, il faut que l’image intermédiaire  $A_1B_1$  se forme dans le plan focal objet de l’oculaire.

1.2.2 Position de l’oculaire et diamètre apparent  $\alpha_2$  de l’image par le microscope : voir fig.5.

1.2.3 Diamètre apparent  $\alpha_2$  de l’image par le microscope. D’après la figure 5 et en choisissant le sens trigonométrique comme sens direct :

$$\tan \alpha_2 = -\frac{\overline{A_1B_1}}{f'_2}$$

avec  $\tan \alpha_2 \approx \alpha_2$  et  $A_1B_1 = \gamma_1 a$  :

$$\alpha_2 = -\frac{\gamma_1 a}{f'_2}$$

## 2. Caractéristiques d’un microscope

### 2.1 Grossissement commercial d’un instrument optique

On rappelle que le grossissement commercial d’un instrument optique est  $G_c = \frac{\alpha_2}{\alpha_{\text{ref}}}$  avec  $\alpha_{\text{ref}}$  l’angle sous lequel un observateur verrait  $AB$  placé au punctum proximum (distance  $d_{PP}$  de l’œil) et  $\alpha_2$  le diamètre apparent de l’image par l’instrument optique.

2.1.1 Exprimons le grossissement commercial de l’oculaire  $G_{c2} = \frac{\alpha_2}{\alpha_{\text{ref}}}$  du microscope en fonction de  $f'_2$  et  $d_{PP}$ . Comme le système optique considéré est l’oculaire, c’est  $A_1B_1$  qu’il faut considérer comme objet pour évaluer  $\alpha_2$  et  $\alpha_{\text{ref}}$ .

$$\text{D’une part : } \alpha_2 = -\frac{\overline{A_1B_1}}{f'_2}$$

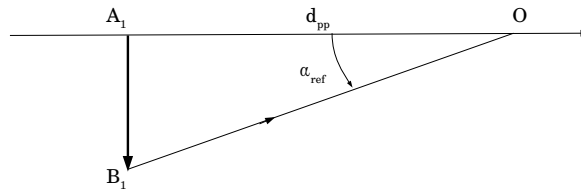


FIGURE 1 – Objet observé au punctum proximum (oculaire).

D’autre part, d’après la figure 2 :  $\alpha_{\text{ref}} = -\frac{\overline{A_1B_1}}{d_{PP}}$ .

D’où :

$$G_{c2} = \frac{d_{PP}}{f'_2}$$

Pour augmenter le diamètre apparent, il faut que  $f'_2 < d_{PP}$ .

2.1.2 Exprimons le grossissement commercial de l’oculaire  $G_c = \frac{\alpha_2}{\alpha_{\text{ref}}}$  du microscope en fonction de  $f'_2$  et  $d_{PP}$ . Comme le système optique considéré est le microscope, c’est  $AB$  qu’il faut considérer comme objet pour évaluer  $\alpha_2$  et  $\alpha_{\text{ref}}$ .

D’une part :  $\alpha_2 = -\frac{\overline{A_1B_1}}{f'_2} = -\frac{\gamma_1 a}{f'_2}$

D’autre part, d’après la figure ?? :  $\alpha_{\text{ref}} = \frac{\overline{AB}}{d_{PP}}$ .

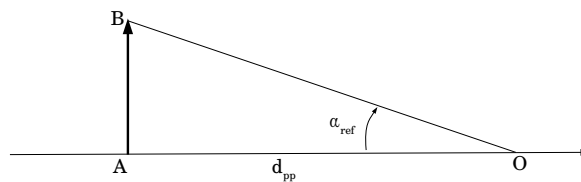


FIGURE 2 – Objet observé au punctum proximum (microscope).

D’où :

$$G_c = -\gamma_1 \frac{d_{PP}}{f'_2} \Leftrightarrow G_c = -\gamma_1 G_{c2}$$

2.1.3 Puissance commerciale  $P$  du microscope :  $P = \alpha_2/AB$ . Avec  $\alpha_2 = -\frac{\overline{A_1B_1}}{f'_2}$  et  $\overline{A_1B_1} = \gamma_1 \overline{AB}$ , il vient :

$$P = -\frac{\gamma_1}{f'_2}$$

2.1.4 Puissance d’un microscope nécessaire pour observer en détails une bactérie ?

Pour être observables, les détails de la bactérie doivent un diamètre apparent supérieur la résolution angulaire  $\varepsilon$  de l’œil. En supposant ces détails de l’ordre de 10 fois plus petit que la bactérie elle-même, il faut que le diamètre apparent  $\alpha_2$  de l’image de la bactérie par le microscope soit au moins 10 fois plus grand que  $\varepsilon$  soit :

$$\alpha_2 \geq 10\varepsilon$$

En notant  $e = AB$  la taille d’une bactérie, il faut que

$$P \geq \frac{10\varepsilon}{e}$$

A.N. :  $\varepsilon \sim 3 \times 10^{-4}$  rad et  $e \sim 1 \mu\text{m}$  donne  $P \gtrsim 3000$ .

## 2.2 Latitude de mise au point

2.2.1 Latitude de mise au point de l’œil :  $] - \infty, -25 \text{ cm}]$ .

2.2.2 A venir....

2.2.3 la latitude de mise au point ramené au microscope est très faible, il faut donc une grande précision sur la distance objet-objectif d’où l’utilisation d’une vis micrométrique. En pratique, on dispose aussi d’objectif de différents grossissements : on commence par celui de plus faible grossissement pour faire la mise au point.

## Problème 3 - Aberrations des lentilles

On appelle *aberrations* des lentilles les écarts à l’idéalité, notamment au stigmatisme et à l’aplanétisme.

### 1. Conditions de Gauss :

- les rayons lumineux sont proches de l’axe optique du lentille ;
- les rayons lumineux sont peu inclinés par rapport à l’axe optique de la lentille.

Dans ces conditions, les lentilles minces sont approximativement stigmatiques et aplanétiques.

### 2. Aberrations géométriques : distorsion

La distorsion est une déformation de l’image bien que le système soit stigmatique. Cela s’explique par une variation de la distance focale suivant l’inclinaison des rayons lumineux. Le grossissement augmente quand la distance focale augmente. Sur l’image par la lentille A, on voit que le grossissement augmente vers les bords du champ donc la focale aussi. Inversement, sur l’image par la lentille B, on voit que le grossissement diminue vers les bords du champ donc la focale aussi.

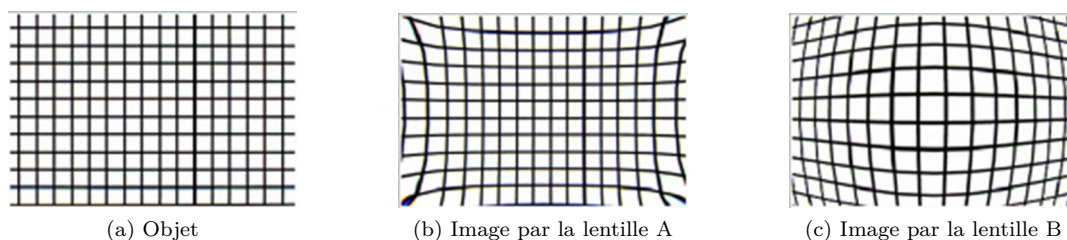


FIGURE 3 – Distorsion par une lentille

### 3. Aberrations chromatiques

3.1 Trajectoire des rayons lumineux bleus et des rayons lumineux rouge avant et après réfraction par la lentille. La vergence de la lentille augmente avec l’indice et l’indice diminue avec la longueur d’onde donc la lentille est plus convergente pour le bleu que pour le rouge (fig.4).

3.2 Voir fig.4. On observe des irisations rouges en amont et bleues en aval.

3.2.1 Détermination graphique de la position du foyer objet  $F$  du doublet : fig.6 en annexe.

3.2.2 Détermination analytiquement la position du foyer objet  $F$ .

Par définition, l’image de  $F$  par le doublet est à l’infini sur l’axe optique. On note  $A_2^\infty$  ce point image :

$$F \xrightarrow{L_1} A_1 \xrightarrow{L_2} A_2^\infty$$

Par définition du foyer objet de  $L_2$ ,  $A_1 = F_2$ .

$$F \xrightarrow{L_1} F_2 \xrightarrow{L_2} A_2^\infty$$

Reste donc à déterminer le point objet  $F$  conjugué à  $F_2$  par  $L_1$ . Relation de conjugaison :

$$\overline{F_1 F} \cdot \overline{F_1' F_2} = -f_1'^2$$

avec  $\overline{F_1' F_2} = \overline{F_1' O_1} + \overline{O_1 O_2} + \overline{O_2 F_2} = -f_1' + \Delta - f_2'$  :

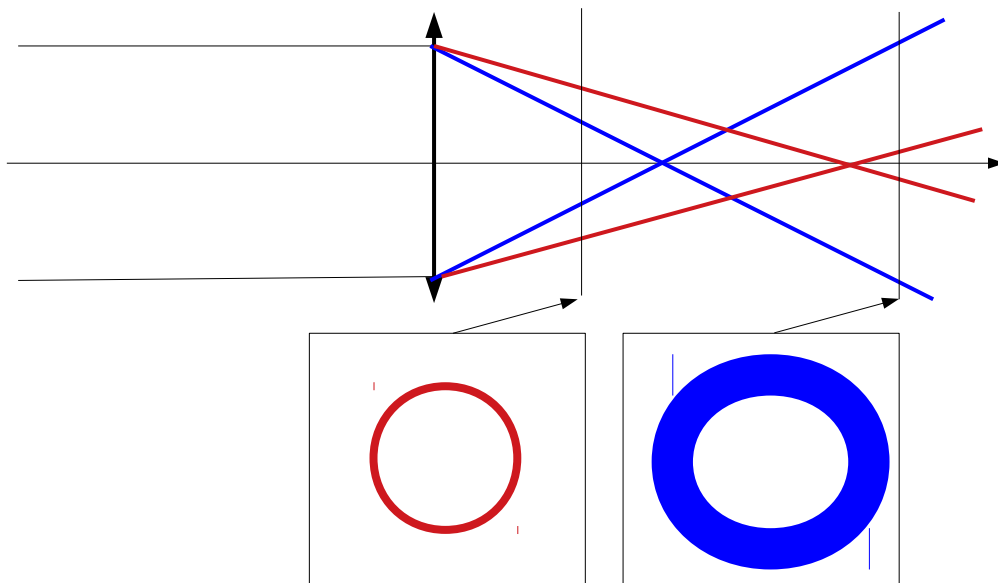


FIGURE 4 – Aberration chromatique longitudinale

$$\overline{F_1 F'} = \frac{f_1'^2}{f_1' + f_2' - \Delta}$$

3.2.3 Détermination graphique de la position foyer image  $F'$  du doublet : fig.7 en annexe.

3.2.4 Détermination analytique de la position foyer image  $F'$ .

Par définition,  $F'$  est l'image par le doublet d'un point à l'infini sur l'axe optique. On note  $A^\infty$  ce point objet :

$$A^\infty \xrightarrow{L_1} A_1 \xrightarrow{L_2} F'$$

Par définition du foyer image de  $L_1$ ,  $A_1 = F_1'$ .

$$A^\infty \xrightarrow{L_1} F_1' \xrightarrow{L_2} F'$$

Reste donc à déterminer le point image  $F'$  conjugué à  $F_1'$  par  $L_2$ . Relation de conjugaison :

$$\overline{F_2 F_1'} \cdot \overline{F_2 F'} = -f_2'^2$$

avec  $\overline{F_2 F_1'} = \overline{F_2 O_2} + \overline{O_2 O_1} + \overline{O_1 F_1'} = f_2' - \Delta + f_1'$  :

$$\overline{F_2 F'} = \frac{f_2'^2}{\Delta - f_1' - f_2'}$$

### 3.3 Correction des aberrations achromatiques

3.3.1 Image finale à l'infini et de diamètre apparent  $\alpha$ .

$$\tan \alpha = \frac{A_1 B_1}{f_2'}$$

avec  $A_1B_1 = \gamma_1 AB = \gamma_1 h$  avec  $\gamma_1 = \frac{\overline{O_1A_1}}{\overline{O_1A}} = \frac{\overline{O_1F_2}}{\overline{O_1F}}$ . D’après le relation de conjugaison appliquée à  $L_1$  :

$$-\frac{1}{\overline{O_1F}} + \frac{1}{\overline{O_1F_2}} = V_1$$

$$\Leftrightarrow -\gamma_1 + 1 = V_1 \overline{O_1F_2}$$

avec  $\overline{O_1F_2} = \overline{O_1O_2} + \overline{O_2F_2} = \Delta - \frac{1}{V_2}$ , on a :

$$\gamma_1 = 1 - V_1 \Delta + \frac{V_1}{V_2}$$

et

$$\boxed{\alpha = (V_1 + V_2 - V_1 V_2 \Delta) h}$$

3.3.2 Calculons  $\frac{d\alpha}{dn}$ .

$$\frac{d\alpha}{dn} = \left( \frac{V_1}{dn} + \frac{V_2}{dn} - \frac{V_1 V_2}{dn} \Delta \right) h$$

$$\Leftrightarrow \frac{d\alpha}{dn} = (A_1 + A_2 + 2(n-1)A_1 A_2 \Delta) h$$

$$\Leftrightarrow \frac{d\alpha}{dn} = \left( \frac{V_1}{n-1} + \frac{V_2}{n-1} + 2 \frac{V_1 V_2}{n-1} \Delta \right) h$$

D’où :

$$\frac{d\alpha}{dn} = 0 \Leftrightarrow \Delta = \frac{V_1 + V_2}{2V_1 V_2}$$

Soit encore :

$$\boxed{\Delta = \frac{1}{2}(f'_1 + f'_2)}$$

3.3.3 Si  $\frac{d\alpha}{dn} = 0$  alors le diamètre apparent de l’image finale est indépendant de  $n$  (à l’ordre 1) et donc de  $\lambda$  : les aberrations chromatiques sont corrigées.



ANNEXE

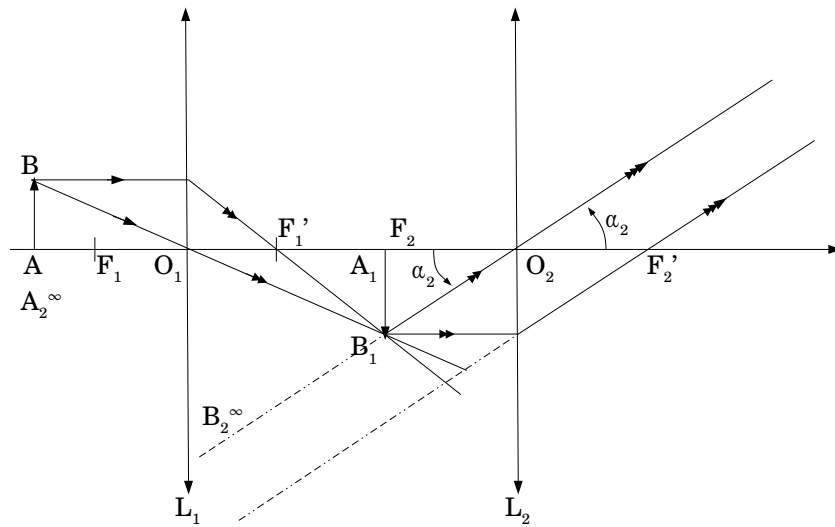


FIGURE 5 – Principe du microscope

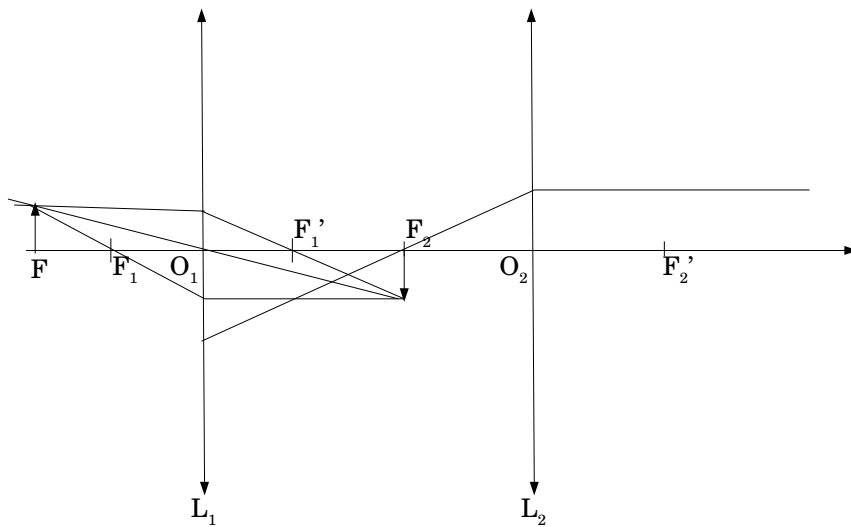


FIGURE 6 – Foyer principal objet du microscope

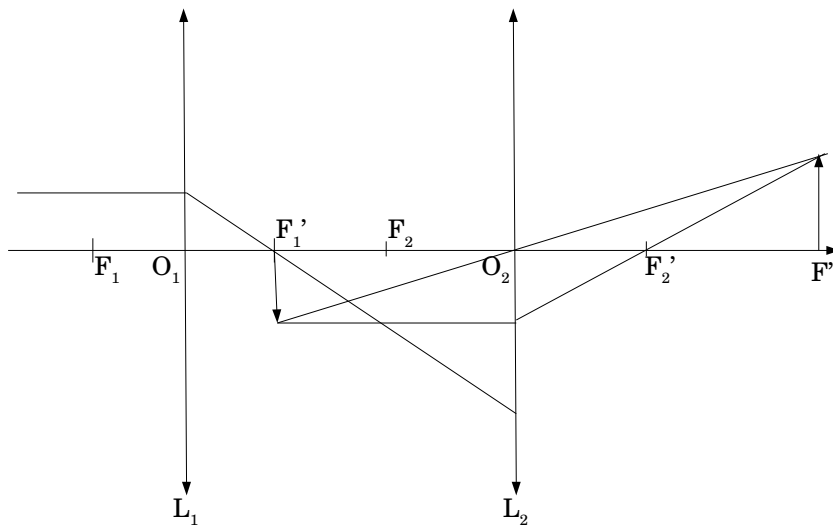


FIGURE 7 – Foyer principal image du microscope