Devoir Surveillé 5 – Physique-Chimie

D.Malka – MPSI 2019-2020 – Lycée Jeanne d'Albret

30.01.2020

Durée de l'épreuve : 4h00

L'usage de la calculatrice est autorisé.

L'énoncé de ce devoir comporte 7 pages

— *La numérotation des exercices doit être respectée.*
— *Les résultats doivent être systématiquement encadrés.*
— *Les pages doivent être numérotées de la façon suivante : n°page courante/nombre total de pages.*
— *Il ne faudra pas hésiter à formuler des commentaires. Le barème tiendra compte de ces initiatives ainsi que des qualités de rédaction de la copie.*
— *Si, au cours de l'épreuve, vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, signalez le sur votre copie et poursuivez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous êtes amené à prendre.*

Problème 1 – Compensateur de champ magnétique extérieur pour une bobine à noyau

Deux bobines d'axe (Oz) sont enroulées autour d'un cylindre ferromagnétique. La première bobine a pour vocation d'être utilisée au sein d'un circuit, la deuxième a pour but d'étendre le domaine de linéarité de la première malgré la présence du cylindre ferromagnétique (fig.1).

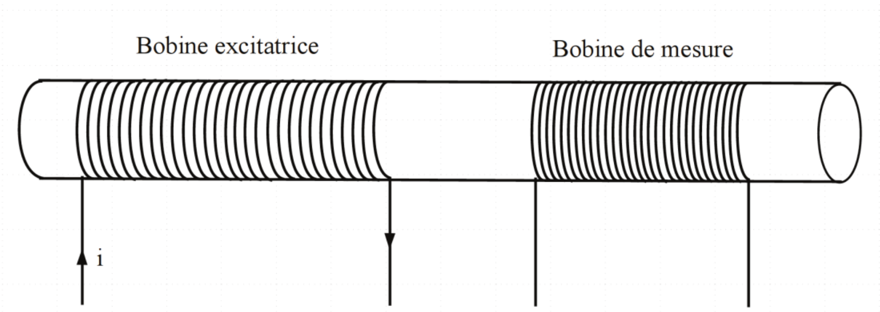


Figure 1 – Barreau ferromagnétique avec bobine excitatrice et bobine de mesure

La première bobine – la *bobine excitatrice* – est parcourue par un courant $i(t)$ sinusoïdal de pulsation ω $i(t) = i_0 + i_m \sin(\omega t)$. Par induction électromagnétique, la deuxième bobine – la *bobine de mesure* – est alors le siège d'une force électromotrice $e(t)$ dont l'allure est représentée fig.2.

1. **Signaux issus des bobines**

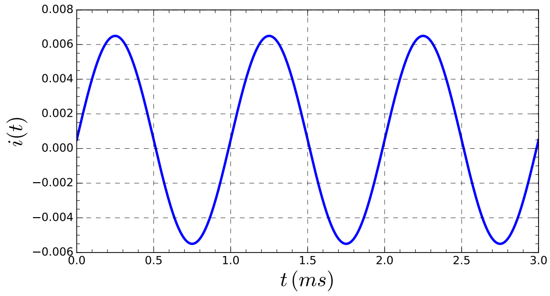
   1.1 Que dire du signal $e(t)$? Que valent la fréquence et l'amplitude de la composante fondamentale ? De la composante continue ?

   1.2 Le système {bobines + cylindre ferromagnétique} est-il linéaire ?

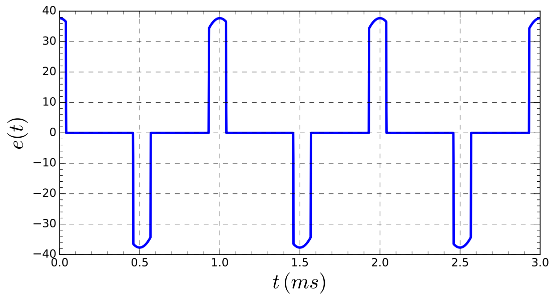
   On propose une modélisation simple de de la tension $e(t)$ aux bornes de la bobine de mesure :

$$e(t) = a.\frac{di(t)}{dt} - b.\frac{di(t)}{dt}i^2(t)$$

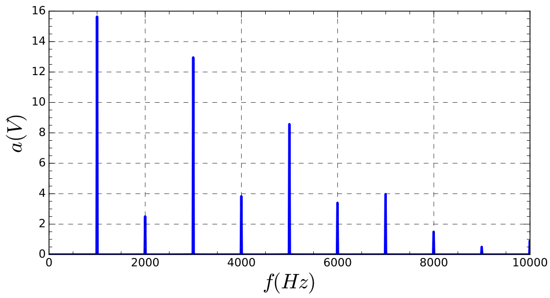
   où les coefficients a et b sont supposés constants et positifs et $i(t)$ est l'intensité électrique du courant parcourant la bobine excitatrice.



(a) Courant i(t) parcourant la bobine excitatrice



(b) Tension e(t) aux bornes de la bobine de mesure



(c) Spectre de e(t)

FIGURE 2 – Les différents signaux relatifs à la bobine excitatrice et à la bobine de mesure.

1.3 Montrer que $e(t)$ s'écrit sous la forme :

$$e(t) = K_1 \cos(\omega t) + K_2 \sin(2\omega t) + K_3 \cos(3\omega t)$$

On donnera les expressions de K_1, K_2 et K_3.

Dans la suite, on admet que le signal utile est celui d'amplitude K_2. On cherche à le récupérer.

2. **Traitement du signal**

En pratique le signal utilisé pour alimenter la bobine excitatrice possède une fréquence f_e typiquement comprise entre 1 kHz et 10 kHz. La chaîne représentée fig.3 est conçue pour récupérer la composante K_2 du signal $e(t)$ qui est utilisée pour étendre le domaine de fonctionnement linéaire de la bobine d'excitation. C'est le mécanisme dit de *compensation*.

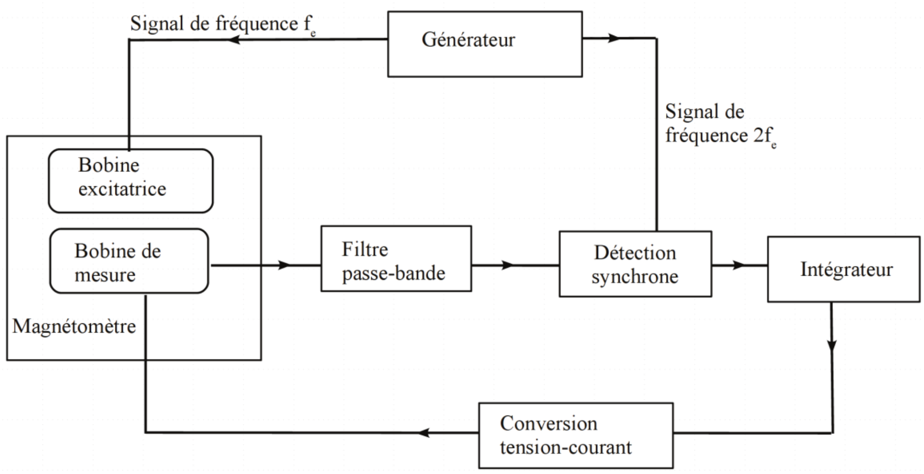


FIGURE 3 – Chaîne de traitement du signal issu de la bobine de mesure

2.1 On propose le filtre fig.4 comme passe-bande.

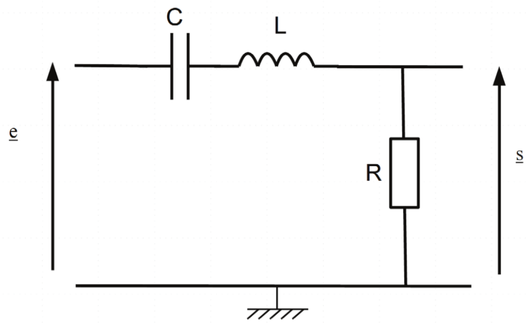


FIGURE 4 – Filtre proposé comme passe-bande

2.1.1 Sans calculs, montrer que ce filtre agit bien comme un passe-bande.

2.1.2 Montrer que la fonction de transfert du filtre s'écrit :

$$\underline{H} = \frac{A}{1 + jQ(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega})}$$

Donner les expressions de ω_0, A et Q en fonction de R, L et C.

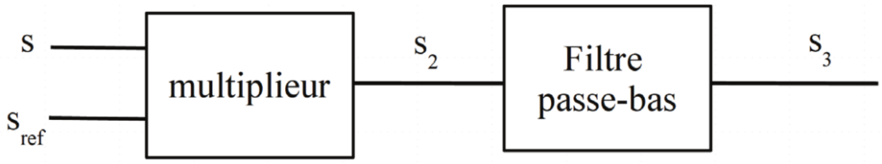
2.1.3 Montrer que le gain est maximal pour une valeur particulière de la pulsation ω. Donner l'expression du gain maximal.

2.1.4 Donner l'allure du gain $H = |\underline{H}|$ en fonction de la pulsation ω.

2.1.5 Comment choisir la valeur de la pulsation ω_0 du filtre ?

2.2 Détection synchrone

La détection directe du signal n'est pas toujours aisée. Le signal peut être de faible intensité et noyé dans du bruit. La détection synchrone permet alors d'extraire le signal recherché. On décrit ici le principe de fonctionnement de la détection synchrone. Le signal $s(t)$ en sortie du filtre passe-bande est composé d'une part du signal physique recherché $s_p(t)$ et d'autre part de composantes présentes non associées au signal physique, que l'on appelle de façon générique le bruit. En notant $b(t)$ le bruit présent, on peut écrire : $s(t) = s_p(t) + b(t)$.
La fréquence du signal physique utile $s_p(t)$ est connue et égale à $2f_e$. On suppose que $s_p(t)$ et $b(t)$ ont une moyenne nulle : $< s_p(t) >=< b(t) >= 0$.
Un dispositif non détaillé ici permet de générer, à partir du signal alimentant la bobine excitatrice, un signal sinusoïdal de référence $s_{\text{ref}}(t)$ de même fréquence que $s_p(t)$, et a priori déphasé de φ par rapport à celui-ci. Le bruit étant indépendant du signal physique recherché, on a la propriété suivante : $< s_{ref}(t)b(t) >= 0$. On pose : $s_p(t) = A\cos(2\omega_e t + \varphi)$ et $s_{\text{ref}}(t) = B\cos(2\omega_e t)$. Le montage ci-dessous permet de mettre en œuvre le principe de la détection synchrone. On effectue dans un premier temps le produit du signal $s_{\text{ref}}(t)$ avec le signal $s(t)$. On admet qu'en sortie du multiplieur le signal s'écrit : $s_2(t) = Ks(t)s_{\text{ref}}(t)$ où K est une constante.



2.2.1 Déterminer l'expression du signal de sortie $s_2(t)$ du multiplieur en fonction de $b(t)$, K, A, B, ω_e et φ. Montrer que le signal $s_2(t)$ possède une composante continue $\dfrac{1}{2}KAB\cos(\varphi)$.

2.2.2 On suppose $fe = 1{,}0\,\text{kHz}$. Proposer une valeur de la fréquence de coupure $f_c = \dfrac{1}{2\pi RC}$ du filtre passe-bas pour ne récupérer que la composante continue de $s_2(t)$.

2.2.3 Proposer un jeu de valeurs pour R et C satisfaisant la contrainte précédente.

2.3 Circuit intégrateur

Pour réaliser la compensation du signal de la bobine excitatrice, il reste à intégrer le signal de sortie $s_3(t)$ du détecteur synchrone. Montrer que le montage fig.5 de sortie $s_4(t)$ réalise la fonction requise.

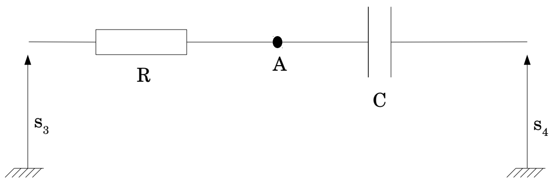


FIGURE 5 – Circuit proposé pour réaliser l'intégration. On admet qu'un dispositif permet d'imposer un potentiel nul au point A sans pour autant connecter ce point à la masse.

Problème 2 – Pourquoi il faut freiner avant un virage.

On considère une voiture de masse m et de centre d'inertie I roulant sur une route rectiligne horizontale Ox à la vitesse $v_0 = 90\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$ avec un mouvement uniforme. On note $\vec{e}_x$ le vecteur unitaire de l'axe Ox dans le sens du déplacement. La voiture aborde ensuite un virage modélisé par un demi-cercle de rayon $R = 50\,\mathrm{m}$. La situation est représentée à différents instants fig.6.

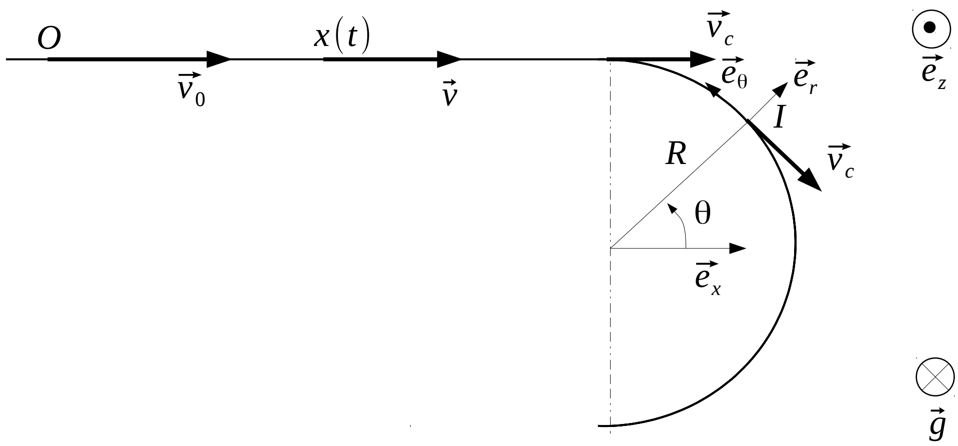


FIGURE 6 – La vitesse de la voiture en différents points de sa trajectoire

Document 1 – Quelques valeurs du cœfficient de frottement dynamique λ

matériaux	coefficient de frottement dynamique λ
acier sur glace	0,050
acier sur acier	0,40
verre sur verre	0,40
pneu sur béton sec	0,70
pneu sur béton mouillé	0,50
semelle de cuir sur bois	0,20
semelle de cuir sur tapis	0,50

1. A l'approche du virage, à $t = 0$, la voiture décélère avec une accélération $a_0 = -5\,m.s^{-2}$ constante pendant une durée t_0. Exprimer la vitesse v de la voiture au moment d'aborder le virage.
2. Déterminer l'équation horaire $x(t)$ du centre d'inertie I de la voiture durant la phase de décélération.
3. On s'intéresse au mouvement du centre d'inertie I de la voiture dans le virage. On suppose qu'elle le parcourt à vitesse constante v_c.
   3.1 Que dire de la vitesse angulaire $\omega = \dot{\theta}$ au cours du mouvement ?
   3.2 En déduire l'expression de l'accélération $\vec{a}$ de I dans le virage.
   3.3 Montrer que, au cours du mouvement, la voiture est nécessairement soumise d'une part à une force $\vec{N}$ verticale et d'autre part à une force $\vec{T}$ radiale orientée vers le centre O du virage.
   3.4 Exprimer $\|\vec{N}\|$ en fonction de m et g.
   3.5 Exprimer $\|\vec{T}\|$ en fonction de v_c.
   3.6 On admet que la voiture adhère au sol tant que $\|\vec{T}\| < \lambda\|\vec{N}\|$. Sinon elle dérape. Exprimer la vitesse maximale v_{max} avec laquelle la voiture peut aborder le virage sans déraper en fonction de g, R et λ.
   3.7 Commenter l'expression de v_{max}.
   3.8 Application numérique sur route sèche puis sur route verglacée.
4. A quelle distance minimale d_0 du virage faut-il commencer à freiner pour le prendre sans risque de déraper (sur route sèche) ?

Problème 3 – Autour du carbonate de calcium

Le calcium est le cinquième élément le plus abondant de la croûte terrestre. On le trouve dans les roches calcaires constituées principalement de carbonate de calcium $CaCO_3$. Le calcium joue un rôle essentiel chez la plupart des organismes vivants vertébrés en contribuant notamment à la formation des os ou des dents...

Constante du gaz parfait : $R = 8{,}314\,\mathrm{J\cdot K^{-1}\cdot mol^{-1}}$.

1. **L'élément calcium**
   1.1 Établir la configuration électronique dans l'état fondamental du calcium. Le numéro atomique du calcium est Z=20.
   1.2 Justifier que le calcium forme l'ion Ca^{2+}.
   1.3 Le magnésium Mg est dans la même colonne que le calcium mais juste au dessus. Quel ion stable forme-t-il ? Est-il plus ou moins réducteur que le calcium ?

   Le squelette d'un homme adulte a une masse moyenne $m = 12{,}0\,\mathrm{kg}$. Les os sont constitués par de l'eau (50% en masse), des composés organiques (25% en masse) et des composés minéraux (25% en masse). En première approximation, on peut admettre que le phosphate de calcium $Ca_3(PO_4)_2$ est l'unique composé minéral présent dans les os.

   Masses molaires atomiques en $\mathrm{g\cdot mol^{-1}}$: Ca : 40 ; P : 31 ; O : 16.

   1.4 En négligeant toute présence de calcium hors des os, estimer la masse m_{Ca} totale de calcium présente chez un adulte.
   1.5 Bien que présentant un aspect fortement minéral, les os sont des tissus vivants. Le calcium du squelette est en renouvellement permanent, 20% de la masse totale de calcium se trouvant remplacée en environ une année (on considérera 360 jours). Sachant qu'un litre de lait apporte 1110 mg de calcium, estimer quel volume de lait devrait boire un adulte quotidiennement s'il voulait couvrir complètement, avec ce seul aliment, ses besoins en calcium ?
2. Solubilité du carbonate de calcium
   Le carbonate de calcium $CaCO_3$ est le composé majeur des roches calcaires comme la craie mais également du marbre. C'est le constituant principal des coquilles d'animaux marins, du corail et des escargots. On évalue sa solubilité c'est-à-dire la quantité qui disparaît par unité de volume dans un solvant donné.
   2.1 Donner un schéma de Lewis de l'ion carbonate CO_3^{2-} et de l'ion hydrogénocarbonate HCO_3^-.

   On donne les équilibres suivant :

$$CaCO_3(s) = Ca^{2+}(aq) + CO_3^{2-}(aq) \quad K_s = 10^{-8.4} \quad (1)$$

$$CO_2(g) + 2H_2O(l) = HCO_3^-(aq) + H_3O^+(aq) \quad K_{a1} = 10^{-6.4} \quad (2)$$

$$HCO_3^-(aq) + H_2O(l) = CO_3^{2-}(aq) + H_3O^+(aq) \quad K_{a2} = 10^{-10.3} \quad (3)$$

2.2 Déterminer la valeur de la solubilité du carbonate de calcium dans l'eau pure prédite par l'équilibre (1).

2.3 En considérant les propriétés acidobasiques des ions carbonates, on aboutit à l'équation :

$$CaCO_3(s) + 2H_3O^+(aq) = CO_2(g) + 3H_2O(l) + Ca^{2+}(aq) \quad (4)$$

Calculer la constante d'équilibre associée à la réaction (4).

2.4 Expliquer pourquoi l'acidification des océans menace les coraux.

3. Cinétique de la dissolution du carbonate de calcium dans une solution acide.

On s'intéresse maintenant à la vitesse de la réaction de dissolution du carbonate de calcium selon deux méthodes.
Pour cela on étudie l'évolution de la réaction entre le carbonate de calcium $CaCO_3(s)$ et un volume $V_0 = 100\,\text{mL}$ d'une solution d'acide chlorhydrique de concentration $c_a = 0{,}10\,\text{mol}\cdot\text{L}^{-1}$.
L'équation de la réaction s'écrit :

$$CaCO_3(s) + 2H^+(aq) = CO_2(g) + H_2O(l) + Ca^{2+}(aq)$$

On considérera que la totalité du dioxyde de carbone formé se dégage.
Première méthode
Dans une première expérience on mesure la pression du dioxyde de carbone apparu en utilisant un capteur de pression différentiel. Le gaz occupe un volume $V = 1{,}0\,\text{L}$ à la température de 25 °C. Les résultats sont regroupés dans le tableau ci-dessous :

$t(s)$	10,0	20,0	30,0	40,0	50,0	60,0	70,0	80,0	90,0	100
$p_{CO_2}(Pa)$	1250	2280	3320	4120	4880	5560	6090	6540	6940	7170

3.1 Établir la relation donnant la quantité de matière en dioxyde de carbone n_{CO_2} à chaque instant t en fonction de p_{CO_2}.

3.2 Établir la relation entre l'avancement x et $n_{CO_2(g)}$. Effectuer l'application numérique à $t = 100\,\text{s}$ afin de compléter le tableau de valeurs suivant.

$t(s)$	10,0	20,0	30,0	40,0	50,0	60,0	70,0	80,0	90,0	100
x(mmol)	0,50	0,92	1,34	1,66	1,97	2,24	2,46	2,64	2,80	

Deuxième méthode
Dans une deuxième expérience on mesure le pH de la solution afin de déterminer $[H^+]$ fonction du temps. Les résultats sont regroupés dans le tableau ci-dessous :

$t(s)$	10,0	20,0	30,0	40,0	50,0	60,0	70,0	80,0	90,0	100
n_{H^+}(mmol)	9,00	8,20	7,30	6,70	6,10	5,50	5,10	4,70	4,40	4,20

3.3 Quelle relation existe-t-il entre n_{H^+} et $[H^+(aq)]$ à tout instant ? Établir la relation entre n_{H^+} et l'avancement x. Effectuer l'application numérique à $t = 10,0s$ afin de compléter le tableau de valeurs suivant :

$t(s)$	10,0	20,0	30,0	40,0	50,0	60,0	70,0	80,0	90,0	100
x(mmol)		0,90	1,35	1,65	1,95	2,25	2,45	2,65	2,80	2,90

3.4 Les deux méthodes sont-elles cohérentes ?
Une fois les résultats expérimentaux obtenus on désire déterminer l'ordre de la réaction par rapport à $[H^+]$.

3.5 Définir la vitesse de la réaction par rapport à $[H^+(aq)]$.

3.6 Établir la relation entre $[H^+(aq)]$ et le temps en supposant que la réaction est d'ordre 2. Établir alors la relation suivante :

$$\frac{1}{c_aV_0 - 2x} - \frac{1}{c_aV_0} = \frac{2kt}{V_0}$$

avec k la constante de vitesse de la réaction.

Dans l'hypothèse d'un ordre 0, on trouve :

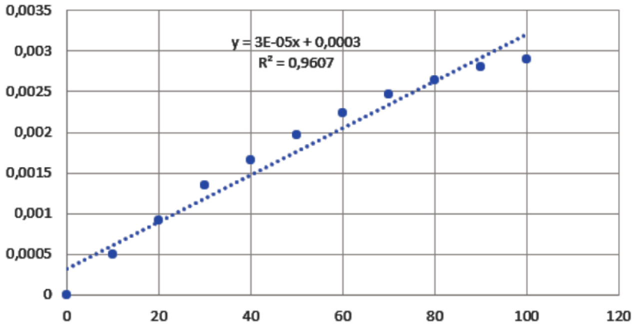
$$x = kV_0 t$$

Dans l'hypothèse d'un ordre 1, on trouve :

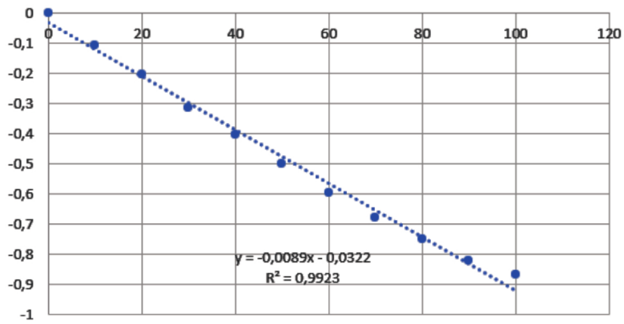
$$\ln\left(\frac{c_a V_0 - 2x}{c_a V_0}\right) = -2kt$$

3.7 A l'aide des graphes fig.7, déterminer l'ordre de la réaction et la constante de vitesse dont on précisera l'unité.

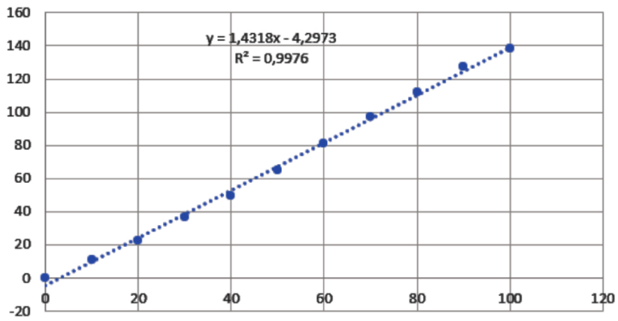
3.8 Que pensez-vous quant à la vitesse de dissolution des coraux dans l'océan ?



(a) $x = f(t)$



(b) $\ln(1 - 200x) = f(t)$



(c) $\dfrac{1}{0.01 - 2x} - 100 = f(t)$

Figure 7 – Graphes expérimentaux