



DS6 – PHYSIQUE-CHIMIE – CORRIGÉ

D.Malka – MPSI 2019-2020 – Lycée Jeanne d’Albret

29.02.2020

Problème 1 – Excitation paramétrique d’un pendule

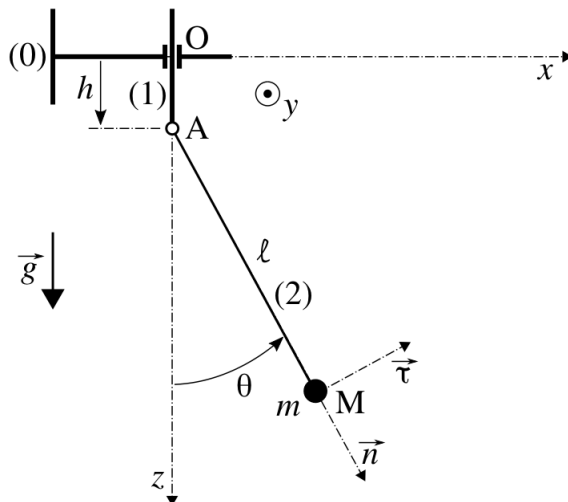


FIGURE 1 – Pendule (2) (m, l) oscillant autour du point A . Ce point peut être animé d’un mouvement selon l’axe (Oz), relativement au référentiel galiléen d’observation \mathcal{R}_0 , par une action extérieure (action sur le paramètre géométrique h).

1. Pas d’excitation du pendule : A est immobile.

1.1 Énergie mécanique du pendule :

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}ml\dot{\theta}^2 - mgl \cos \theta$$

Le pendule n’est soumis qu’à la réaction du support et au poids. La réaction du support ne travaille pas (A est immobile) et le poids est conservatif. Le système est donc conservatif : l’énergie mécanique se conserve.

1.2 Les positions d’équilibre θ_{eq} vérifient :

$$\frac{\partial E_p}{\partial \theta}(\theta_{eq}) = 0 \quad (\spadesuit)$$

avec $E_p = -mgl \cos \theta$:

$$(\spadesuit) \Leftrightarrow \sin \theta_{eq} = 0 \Leftrightarrow \theta_{eq} = 0[\pi]$$

Stabilité des positions d’équilibre ? Il faut évaluer $\frac{\partial^2 E_p}{\partial \theta^2}(\theta_{eq})$.

$$\frac{\partial^2 E_p}{\partial \theta^2} = mgl \sin \theta$$

— Pour $\theta = 0$, $\frac{\partial^2 E_p}{\partial \theta^2} = mgl > 0$. Donc la position d’équilibre est stable.

— Pour $\theta = \pi$, $\frac{\partial^2 E_p}{\partial \theta^2} = -mgl < 0$. Donc la position d’équilibre est instable.

On peut aussi tout simplement tracer la fonction énergie potentielle et localiser les maxima et les minima.

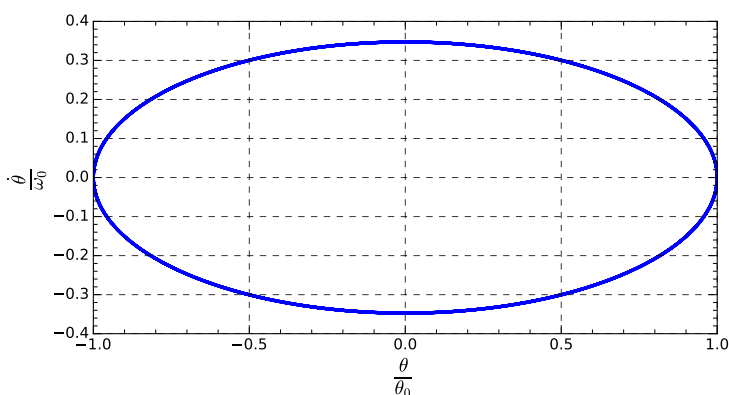
1.3 Équation du mouvement vérifiée par θ .

$$\frac{dE_m}{dt} = 0$$

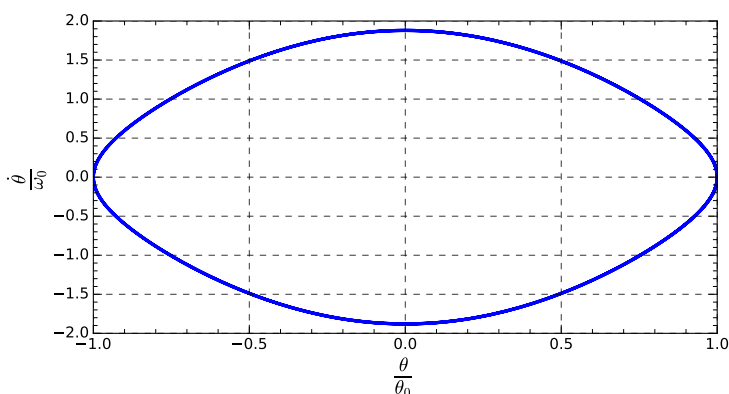
$$\Leftrightarrow ml\dot{\theta}\ddot{\theta} = -mgl\dot{\theta}\sin\theta$$

$$\Leftrightarrow \ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin\theta = 0 \quad (\clubsuit) \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

1.4 Voir fig.2.



(a) La trajectoire de phase est une ellipse donc les oscillations sont harmoniques. Les mouvements sont donc de faible amplitude : $\theta_0 = 20^\circ$.



(b) La trajectoire de phase n’est pas elliptique donc les oscillations sont anharmoniques. Le pendule s’écarte donc notablement de sa position d’équilibre stable : $\theta_0 = 140^\circ$.

FIGURE 2 – Trajectoires de phase du pendule pour deux valeurs initiales de θ différentes.

1.5 Au voisinage de $\theta = 0$, $\sin\theta = \theta + o(\theta)$. L’équation du mouvement devient :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0$$

On reconnaît l’équation d’un oscillateur harmonique de pulsation propre ω . La solution générale s’écrit :

$$\theta(t) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t$$

Continuité de la position et de la vitesse :

$$\begin{cases} \theta(0^+) = \theta(0^-) \\ \dot{\theta}(0^+) = \dot{\theta}(0^-) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = \frac{v_0}{\omega_0} \end{cases}$$

Finalement :

$$\theta(t) = \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t$$

2. Excitation paramétrique du pendule : A est en mouvement.

2.1 Si l'accélération de A est nulle i.e. $\ddot{h} = 0$ donc $G = 0$, on doit retrouver l'équation (♣). On retient donc l'équation :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2(1 - G) \sin \theta = 0$$

2.2 $G = \frac{\ddot{h}}{g} = \frac{m\ddot{h}}{mg}$. G compare le poids et la force résultant de l'accélération de A.

2.3 On peut montrer que l'élément (1) exerce au point A de l'élément (2) la force de réaction :

$$\vec{R} = \begin{pmatrix} -mg(U + (1 - G) \cos \theta) \sin \theta \\ 0 \\ -mg(U + (1 - G) \cos \theta) \cos \theta \end{pmatrix}_{(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)} \quad \text{avec } U = \dot{\theta}^2 / \omega_0^2 \quad \text{et } G = \ddot{h} / g$$

Initialement, le pendule est immobile. L'opérateur impose alors un mouvement vertical harmonique de A :

$$h(t) = -a \sin(\Omega t)$$

où a et Ω sont des constantes positives.

On suppose $|G| \ll 1$ et on se place au démarrage des oscillations : $\theta \ll 1$ et $\theta(t) = K \sin \omega_0 t$.

2.3.1 Expression approchée de \vec{R} . $1 - G \approx 1$, $\sin \theta = \theta + o(\theta^2)$, $\cos \theta = 1 - \frac{\theta^2}{2} + o(\theta^2)$. De plus si θ est d'ordre n alors sa dérivée $\dot{\theta}$ est du même ordre (approximation usuelle) donc $U = \dot{\theta}^2 / \omega_0^2$ est un terme d'ordre 2. Alors :

$$R_x = -mg(U + (1 - G) \cos \theta) \sin \theta$$

$$R_x \approx -mgU \sin \theta - mg \cos \theta \sin \theta$$

$$R_x \approx -mgU\theta - mg(1 - \theta^2/2)\theta$$

$$R_x \approx \underbrace{-mgU\theta}_{\text{ordre 3}} - \underbrace{mg\theta}_{\text{ordre 1}} - \underbrace{mg\theta^3/2}_{\text{ordre 3}}$$

Donc à l'ordre 2 :

$$R_x \approx -mg\theta$$

$$R_z = -mg(U + (1 - G) \cos \theta) \cos \theta$$

$$R_z \approx -mg(U + \cos \theta) \cos \theta$$

$$R_z \approx -mg(U + (1 - \theta^2/2))(1 - \theta^2/2)$$

$$R_z \approx -mgU(1 - \theta^2/2) - mg(1 - \theta^2/2)^2$$

$$R_z \approx -mgU - mgU\theta^2/2 - mg(1 - \theta^2)$$

$$R_z \approx \underbrace{-mgU}_{\text{ordre 2}} - \underbrace{mgU\theta^2/2}_{\text{ordre 4}} - \underbrace{mg}_{\text{ordre 0}} + \underbrace{mg\theta^2}_{\text{ordre 2}}$$

Donc à l’ordre 2 :

$$R_z \approx -mg(U + 1 - \theta^2)$$

2.3.2 Puissance instantanée $P(t)$ reçue dans le référentiel \mathcal{R}_0 par le pendule via la force \vec{R} exercée en A :

$$P(t) = \vec{R} \cdot \vec{v}(A) = \vec{R} \cdot \dot{h} \vec{u}_z$$

$$\Leftrightarrow P(t) = R_z \dot{h}$$

avec :

$$R_z \approx -mg(U + 1 - \theta^2) = -mg(U + 1 - K^2 \sin^2 \omega_0 t)$$

$$h(t) = -a \sin \Omega t \Rightarrow \dot{h} = -a\Omega \cos \Omega t$$

$$U = \frac{\dot{\theta}^2}{\omega_0^2} = \frac{K^2 \omega_0^2 \cos^2 \omega_0 t}{\omega_0^2} = K^2 \cos^2 \omega_0 t$$

il vient :

$$P(t) = mga\Omega(1 - K^2 \sin^2 \omega_0 t + K^2 \cos^2 \omega_0 t) \cos \Omega t$$

$$P(t) = mga\Omega(1 - K^2(1 - \cos^2 \omega_0 t) + K^2 \cos^2 \omega_0 t) \cos \Omega t$$

$$P(t) = mga\Omega(1 - K^2(1 - 2 \cos^2 \omega_0 t)) \cos \Omega t$$

$$P(t) = mga\Omega(1 + K^2 \cos 2\omega_0 t) \cos \Omega t$$

2.3.3 Calculons la puissance moyenne P_m reçue par le pendule.

$$P_m = \langle P(t) \rangle = mga\Omega K^2 (1 + \underbrace{\langle \cos 2\omega_0 t \cos \Omega t \rangle}_J)$$

$$I = \langle \cos 2\omega_0 t \cos \Omega t \rangle = \underbrace{\frac{1}{2} \langle \cos((2\omega + \Omega)t) \rangle}_{=0} + \underbrace{\frac{1}{2} \langle \cos((2\omega - \Omega)t) \rangle}_{\neq 0 \text{ ssi } \Omega=2\omega_0}$$

En conclusion, P_m est non nulle ssi la pulsation d’excitation Ω du pendule est égale à deux fois la pulsation ω_0 caractéristique du pendule :

$$\Omega = 2\omega_0$$

La puissance moyenne P_m reçue par le pendule vaut alors :

$$P_m = mga\Omega K^2$$

$P_m > 0$: le pendule reçoit de l’énergie. La condition $\Omega = 2\omega_0$ est appelée condition de résonance paramétrique.

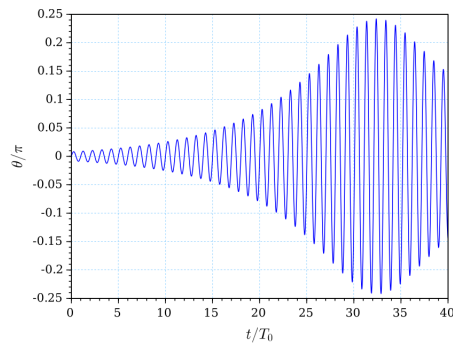


FIGURE 3 – Oscillations du pendule

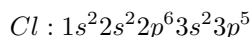
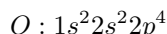
2.3.4 Interprétons l'évolution de l'amplitude du mouvement du pendule représentée fig.3.

On excite le pendule tel que $\Omega = 2\omega_0$. On a montré que si $\theta(t) = K \sin \omega_0 t$, le pendule reçoit de l'énergie. Les petites oscillations s'opérant à la pulsation $\omega_0 = \sqrt{g/l}$, la condition est vérifiée et l'amplitude des oscillations augmentent. À partir de $t \approx 33$ s, l'amplitude des oscillations atteint une valeur telle que la pulsation du mouvement n'est plus ω_0 . la condition de résonance n'est plus respectée et le pendule cède de la puissance au lieu d'en recevoir : l'amplitude décroît alors temporairement.

Problème 2 – Le sol martien

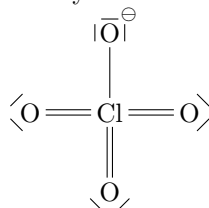
1. Généralités

1.1 Configurations électroniques des atomes O ($Z=8$) et Cl ($Z=17$) dans leur état fondamental.



1.2 Schéma de Lewis de l’ion perchlorate ClO_4^- (l’atome de chlore est l’atome central de l’ion).

Chaque atome d’oxygène apporte 6 électrons de valence, l’atome de chlore en apporte 7 et l’ion étant chargé $-$, l’ion comprend 1 électron de plus. Il y a 32 électrons de valence donc 16 doublets à placer.

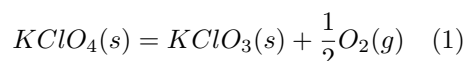


☞ L’oxygène étant plus électronégatif que le chlore, il est plus favorable qu’il porte la charge formelle \ominus

On remarque que le chlore ne respecte pas la règle de l’octet : il est hypervalent.

2. Étude thermodynamique d’une réaction de destruction des ions perchlorate

On étudie ici la réaction modélisée par l’équation suivante :



de constante d’équilibre $K(T_0) = 1,7 \times 10^{-4}$ pour $T_0 = 210$ K.

2.1 Comme $K(T_0) = 1,7 \times 10^{-4} \ll 1$, naïvement, on peut penser que la réaction étant très limitée, la production d’espèces chlorées susceptible de dégrader les protéines est très faible et que l’équilibre est atteint pour une faible concentration de ces espèces.

2.2 En fait la pression partielle martienne en dioxygène est constante et vaut $P_{O_2} = 0,80$ Pa. Comment évolue la réaction (1)? On calcule le quotient réactionnel :

$$Q = \frac{P_{O_2}}{p^\circ} = 8,0 \times 10^{-6}$$

A chaque instant $Q < K$ donc la réaction se fait dans le sens directe. Le système est hors équilibre et la réaction se déroule tant qu’il reste des sels de perchlorate.

3. Étude cinétique de la décomposition des molécules de chloro-glycine

3.1 Le temps de demi-réaction est la durée au bout de laquelle le réactif limitant de la réaction voit sa concentration réduite de moitié. Graphiquement, on constate que le temps de demi-réaction vaut environ $t_{1/2} \approx 4 \times 10^5$ s quelle que soit la concentration initiale. Cela signe une réaction d’ordre 1.

3.2 Calculons la constante de vitesse k à partir de $t_{1/2}$. Soit v la vitesse de réaction.

Par définition $v = -\frac{d[A]}{dt}$ et la réaction est d’ordre 1 donc $v = k[A]$. D’où :

$$\frac{d[A]}{dt} = -\nu_A k[A]$$

Qui s’intègre entre 0 et t en

$$[A](t) = [A]_0 e^{-kt}$$

Définition du temps de demi-réaction $t_{1/2}$:

$$[A](t_{1/2}) = \frac{[A]_0}{2}$$

$$\Leftrightarrow [A]_0 e^{-kt_{1/2}} = \frac{[A]_0}{2}$$

$$\Leftrightarrow t_{1/2} = \frac{\ln 2}{k}$$

$$\text{A.N. : } t_{1/2} = 4 \times 10^5 \text{ s} \Rightarrow k = 1,7 \times 10^{-6} \text{ s}^{-1}$$

Cette valeur est en accord avec celle obtenu une valeur par l'université de Weber.

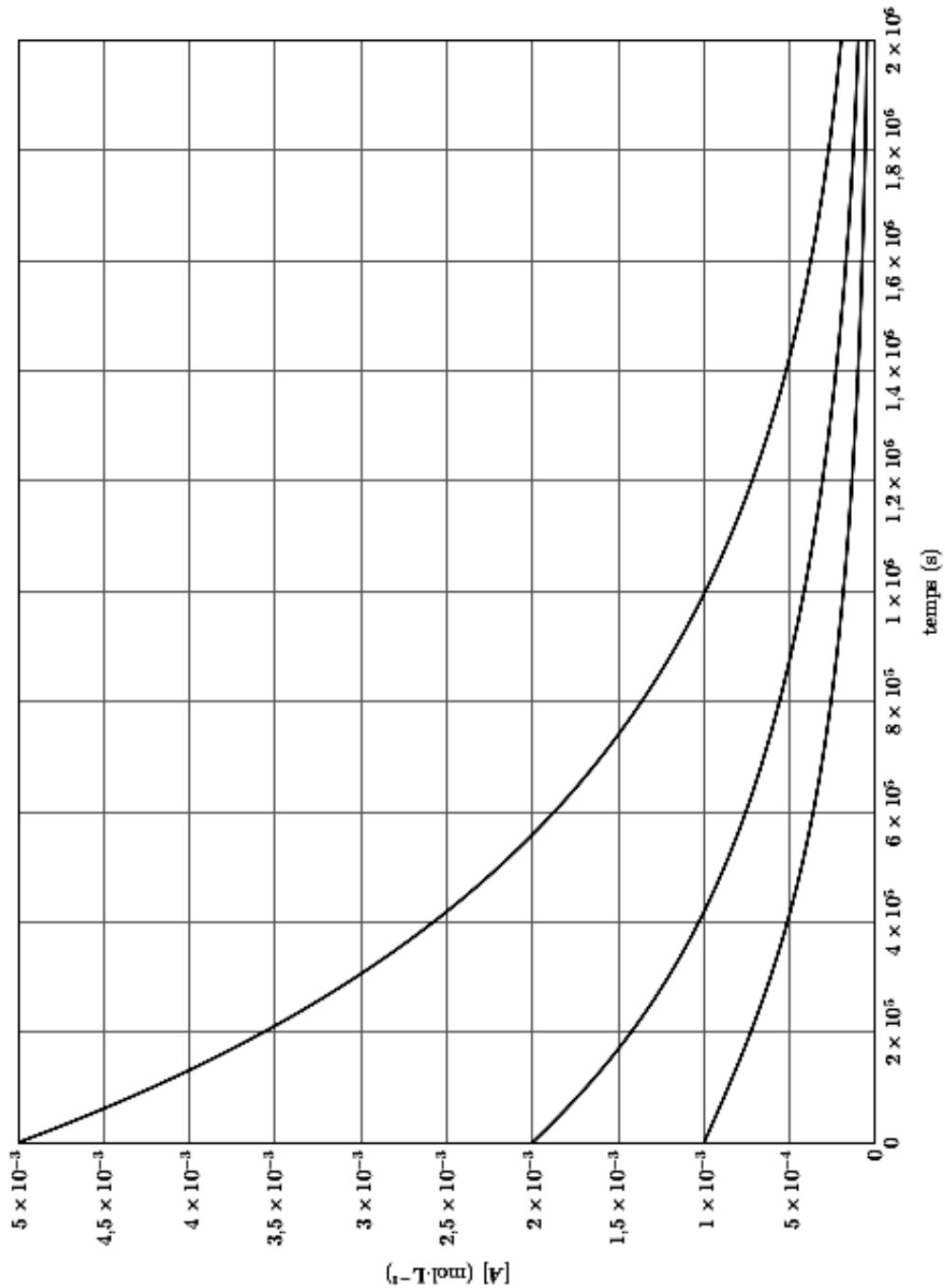


FIGURE 4 – Évolution temporelle de la concentration en chloro-glycine pour trois concentrations molaires initiales différentes $[A]_0 = 1,00 \times 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$, $[A]_0 = 2,00 \times 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$, $[A]_0 = 5,00 \times 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$