



DEVOIR SURVEILLÉ 6 – PHYSIQUE-CHIMIE – CORRIGÉ

D.Malka – MPSI 2018-2019 – Lycée Jeanne d'Albret

21.01.2019

Problème 1 – Structures cristallographiques du fer et de l'acier

1. Le fer γ . A haute température le fer cristallise suivant le réseau cubique faces centrées (fer γ).

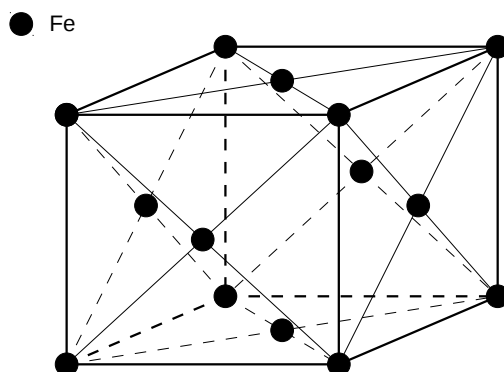


FIGURE 1 – Maille conventionnelle de fer γ

1.1 Population de la maille : $P(Fe) = 8 \times \frac{1}{8} + 6 \times \frac{1}{2} = 4$

1.2 Compacité : $c = \frac{V_{atomes}}{V_{maille}}$ avec :

— $V_{atomes} = P(Fe) \times V_{Fe} = \frac{16\pi R_\gamma^3}{3}$

— $V_{maille} = a^3$

D'après le modèle des sphères dures, les atomes de fer plus proches voisins sont en contact. Par exemple, l'atome de Fe au centre de la face (100) est en contact avec les sommets du carré ce qui donne suivant la diagonal d'une face :

$$4R_\gamma = \sqrt{2}a \Leftrightarrow \boxed{R_\gamma = \frac{\sqrt{2}a}{4}}$$

On peut calculer numérique la compacité de la structure cubique face centrée :

$$c = \frac{16\pi}{3a^3} \times \left(\frac{\sqrt{2}a}{4}\right)^3$$

$$\boxed{c = \frac{\pi\sqrt{2}}{6} = 74\%}$$

1.3 Paramètre de maille : $\boxed{a_\gamma = 2\sqrt{2}R_\gamma}$.

A.N. : $a = \underline{SI365pm}$

1.4 Masse volumique ρ_{Fe} du fer γ .

$$\rho_{Fe} = \frac{P(Fe)m_{Fe}}{V_{maille}}$$

avec :

$$\begin{aligned} - V_{maille} &= a^3 \\ - m_{Fe} &= \frac{M_{Fe}}{N_A} \\ - P(Fe) &= 4 \end{aligned}$$

$$\rho_{Fe} = \frac{P(Fe)M_{Fe}}{a^3}$$

A.N. : $\rho_{Fe} = 7625 \text{ kg} \cdot \text{m}^3$. Ordre de grandeur cohérent avec la phase solide.

1.5 La cohésion des cristaux métalliques est assurée par l’interaction du gaz d’électrons libres avec le réseau cationique.

1.6 La liaison métallique est une liaison forte : l’énergie de liaison est de l’ordre de $1000 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$.

1.7 La densité d’électrons libres du fer vaut $n = 1,69 \times 10^{23} \text{ e}^-/\text{m}^3$. Ces électrons proviennent des atomes de fer. Ce faisant, ils s’ionisent. On cherche à calculer le nombre z d’électrons cédés par chaque atome de fer du réseau. La densité d’électrons libres étant une grandeur intensive, on peut l’exprimer à l’échelle de la maille :

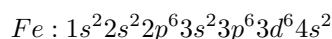
$$n = \frac{\text{nb d'électrons dans une maille}}{\text{Volume de la maille}}$$

avec le volume d’une maille qui vaut a^3 et le nombre d’électrons libres qui vaut $z \times P(Fe)$:

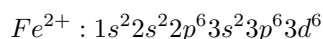
$$n = \frac{zP(Fe)}{a^3} \Leftrightarrow z = \frac{na^3}{P(fe)}$$

A.N. : $z = 2,03 \approx 2$. On déduit que chaque atome de Fer cède deux électrons au gaz d’électrons libres et forme donc un ion Fe^{2+} .

1.8 Configuration électronique de l’ion Fe^{2+} ? Écrivons d’abord celle du fer atomique :



pour en déduire celle de l’ion Fe^{2+} :



2. L’austénite

L’austénite est un acier riche en carbone. Le carbone est soluble dans le fer en phase liquide mais beaucoup moins en phase solide. Les atomes de carbone doivent alors s’insérer dans les sites octaédriques du cristal de fer. La rayon atomique du carbone vaut $R_C = 77 \text{ pm}$.

2.1 Sites octaédriques : fig.2.

$$\text{Nombre de sites octaédriques : } N_O = 12 \times \frac{1}{4} + 1 = 4$$

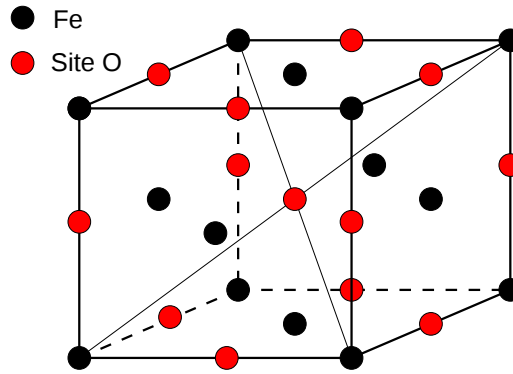
2.2 Un atome de carbone peut-il se loger dans un site octaédrique sans expansion de la maille ?

Calculons le rayon r_O d’un site octaédrique et comparons le au rayon de l’atome de carbone $R_C = 77 \text{ pm}$.

Les atomes de fer plus proches voisins du site octaédrique situé sur une arête de la maille sont les atomes appartenant à la même arête. Il vient :

$$2R_\gamma + 2r_O = a$$

$$\Leftrightarrow R_\gamma = \frac{a}{2} - r_O$$

FIGURE 2 – Localisation des sites octaédriques dans la maille du fer γ

A.N. : $r_0 = 54 \text{ pm}$

$r_O < R_C$ donc les atomes de carbone ne peuvent pas s’insérer dans les sites tétraédriques sans expansion de la maille.

- 2.3 En présence d’atomes de carbone le paramètre de maille passe de a à a' de l’austénite. En supposant le contact entre atome de carbone et de fer a' est donné par :

$$a' = 2R_\gamma + 2R_C$$

A.N. : $a' = 412 \text{ pm}$

- 2.4 Le pourcentage massique de carbone est une grandeur intensive : on peut donc l’évaluer au sein d’une maille :

$$\mathcal{P}_C = \frac{p(C).m_C}{p(C).m_C + p(Fe).m_{Fe}} = \frac{p(C).M_C}{p(C).M_C + p(Fe).M_{Fe}}$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{P}_C(p(C).M_C + p(Fe).M_{Fe}) = p(C).M_C$$

$$\Leftrightarrow (\mathcal{P}_C - 1)p(C).M_C = -\mathcal{P}_C p(Fe).M_{Fe}$$

$$\Leftrightarrow p(C) = \mathcal{P}_C \frac{p(Fe) M_{Fe}}{(1 - \mathcal{P}_C) M_C}$$

A.N. : $p(C) \approx 0,25$. Il y a donc en moyenne un 1/4 d’atome de carbone par maille. La majorité des sites octaédriques est inoccupée.

- 2.5 En supposant que le nouveau paramètre de maille est a' précédemment calculé bien que l’intégralité des sites tétraédriques ne soit pas occupée, la masse volumique de l’acier vaut :

$$\rho_{acier} = \frac{p(Fe)M_{Fe} + p(C)M_C}{\mathcal{N}_A a'^3}$$

A.N. : $\rho_{acier} = 5373 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$

L’acier est bien moins dense que le fer : la dilatation de la maille l’emporte sur l’ajout d’atomes de carbone.

Problème 2 – Suspension automobile

1. Préliminaires

1.1 Unité légale du coefficient de frottement α ?

$$\vec{f} = -\alpha(\dot{z}(t) - \dot{z}_R(t))\vec{u}_z \Rightarrow [f] = [\alpha][(\dot{z}(t) - \dot{z}_R(t))]$$

$$\Leftrightarrow [\alpha] = [F][\dot{z}(t)]$$

Or $[F] = M.L.T^{-2}$ et $[\dot{z}(t)] = L.T^{-1}$ donc $[\alpha] = M.T^{-1}$ et son unité légale est le kg · s⁻¹.

1.2 La masse M d'une voiture est de l'ordre de 1 t à 2 t. Le modèle quart de suspension impose $m = \frac{M}{4} \sim 300$ kg.

1.3 Force de rappel du ressort.

$$\vec{T} = -k(l - l_0)\vec{u}_z \quad \text{avec} \quad l = z - z_R$$

d'où :

$$\vec{T} = -k(z - z_R - l_0)\vec{u}_z$$

1.4 Hauteur z_e de la caisse à l'équilibre. A l'équilibre, $z = z_e = \text{cste}$, $\dot{z}_R = 0$ et $z_R = 0$, et seule la tension du ressort et le poids agissent sur M . Ces deux forces se compensent :

$$\vec{P} + \vec{T} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow -mg - k(z_e - l_0) = 0$$

$$\Leftrightarrow z_e = l_0 - \frac{mg}{k}$$

$z_e < l_0$ est cohérent : il y a compression du ressort sous l'effet du poids de la caisse.

2. **Déplacement sur route plane horizontale.** Dans cette partie, la voiture roule à vitesse constante sur une route plane et horizontale si bien que $\forall t, z_R(t) = 0$. Dans cette partie, $\alpha = 1,0 \times 10^4$ SI.

2.1 Équation différentielle vérifiée par $Z(t) = z(t) - z_e$.

Système : caisse.

Référentiel : \mathcal{R}' , galiléen.

Inventaire des forces à l'équilibre :

— Poids : $\vec{P} = -mg\vec{u}_z$

— Force de rappel du ressort : $\vec{T} = -k(z - z_R - l_0)\vec{u}_z$

— Force de frottement : $\vec{f} = -\alpha(\dot{z} - \dot{z}_R)\vec{u}_z$

Relation fondamentale de la dynamique (en fait théorème du centre de masse comme nous le verrons plus tard) appliqué à la caisse dans le référentiel \mathcal{R}' :

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{T} + \vec{f}$$

avec $\vec{a} = \ddot{z}\vec{u}_z$, $g - \frac{k}{m}l_0 = \omega_0^2 z_e$ et en projection suivant \vec{u}_z :

$$\ddot{z} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{z} + \omega_0^2 z = \omega_0^2 z_e + \omega_0^2 z_R + \frac{\omega_0}{Q}\dot{z}_R$$

avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, $Q = \frac{m\omega_0}{\alpha}$.

Or ici, $\forall t, z_R(t) = 0$ ce qui implique également $\forall t, \dot{z}_R(t) = 0$ donc :

$$\ddot{z} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{z} + \omega_0^2 z = \omega_0^2 z_e$$

En posant $Z = z - z_e$ l’écart à la position d’équilibre, il vient :

$$\ddot{Z} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{Z} + \omega_0^2 Z = 0$$

On reconnaît l’équation d’un oscillateur harmonique.

2.2 Calculons la pulsation propre, la fréquence propre, la période propre du système.

— pulsation propre : $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 5,77 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$

— fréquence propre : $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} = 0,92 \text{ Hz}$

— période propre : $T_0 = \frac{1}{f_0} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 1,09 \text{ s}$

Valeurs cohérentes avec l’expérience quotidienne.

2.3 Expression générale de $Z(t)$. Il s’agit de résoudre

$$\ddot{Z} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{Z} + \omega_0^2 Z = 0$$

donc de déterminer le régime libre de l’oscillateur. Sa nature dépend de la valeur de Q :

$$Q = \frac{m\omega_0}{\alpha} = \frac{300 \times 5,77}{1,0 \times 10^4} \approx 0,17$$

$Q < \frac{1}{2}$ donc le régime est apériodique. En résolvant l’équation caractéristique associée à l’équation différentielle linéaire à coefficients constants d’ordre 2, il vient :

$$Z(t) = e^{-t/\tau} (a \cosh \Omega t + b \sinh \Omega t)$$

avec $\Omega = \omega_0 \sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1}$, $\tau = \frac{2Q}{\omega_0}$ et a, b des constantes d’intégration à déterminer.

3. **Descente d’un trottoir.** On suppose que la voiture descend un trottoir de hauteur $h = 20 \text{ cm}$. Le choc sur la route à lieu à $t = 0$ (fig.3). Dans cette partie, $\alpha = 1,0 \times 10^4 \text{ SI}$.

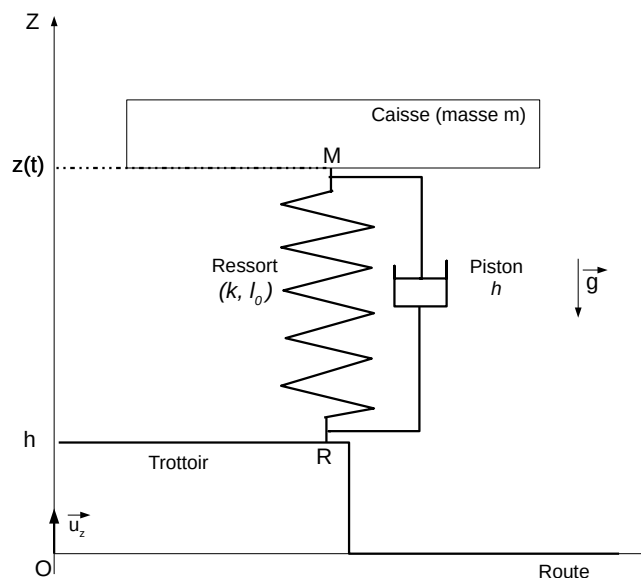


FIGURE 3 – La voiture est sur le trottoir à $t < 0$. Elle le descend et la roue R entre en contact avec la route à $t = 0$. L’altitude de la route vaut 0.

3.1 On assimile la descente du trottoir par la voiture à une chute libre d’une hauteur h .

Par application du théorème de centre de masse, on obtient en considérant $z(t_0) = h$ et $\dot{z}(t_0) = 0$ (avec $t_0 < 0$, l’instant du début de la chute) :

$$\ddot{z} = -g \Rightarrow \dot{z} = -g \cdot (t - t_0) \Rightarrow z - h = -\frac{1}{2}g \cdot (t - t_0)^2$$

A $t = 0$, $\dot{z}(0) = v_0$ et $z(0) = 0$ d’où :

$$v_0 = g \cdot t_0 \quad \text{avec} \quad h = \frac{1}{2}g \cdot t_0^2$$

On en déduit :

$$v_0 = -\sqrt{2gh}$$

A.N. : $v_0 \approx 2,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

3.2 Réponse complète du système $Z(t)$ pour $t \geq 0$ en fonction v_0 , Ω et τ . Pour cela, on utilise la continuité à $t = 0$ de la position $Z(t)$ et de la vitesse $\dot{Z}(t)$. Calculons dans un premier temps $\dot{Z}(t)$:

$$\dot{z}(t) = e^{-\frac{t}{\tau}} \left(-\frac{1}{\tau} (a \cosh(\Omega t) + b \sinh(\Omega t)) + \Omega (a \sinh(\Omega t) + b \cos(\Omega t)) \right)$$

D’après le modèle, à $t = 0$, $Z(0^-) = 0$ et $\dot{Z} = 0^-$.

Relation de continuité à $t = 0$:

— Continuité de la position :

$$Z(0^+) = Z(0^-) \Leftrightarrow a = 0 \Leftrightarrow \underline{a = 0}$$

— Continuité de la vitesse :

$$\dot{Z}(0^+) = \dot{Z}(0^-) \Leftrightarrow \Omega b = v_0 \Leftrightarrow \underline{b = \frac{v_0}{\Omega}}$$

Finalement :

$$Z(t) = \frac{v_0}{\Omega} e^{-\frac{t}{\tau}} \sinh(\Omega t)$$

Justifions $Z(0^-) = 0$ et $\dot{Z}(0^+) = v_0$. Ces conditions initiales supposent que pendant la chute, le ressort, initialement comprimé, ne se détend pas. Montrons qu’il n’a pas le temps de le faire. La durée de la chute est de l’ordre de $t_c = \frac{h}{v_0} \approx 0,1 \text{ s}$. Le temps caractéristique de détente du ressort est de l’ordre de $T_0 \approx 0,5 \text{ s}$. Comme $t_c \sim \frac{T_0}{5}$, en première approximation, on peut supposer que $Z(0^-) = 0$ et $\dot{Z}(0^+) = v_0$ ¹.

3.3 Allure de $Z(t)$ pour $t \geq 0$: fig.??.

3.4 Montrons que la réponse du système peut s’écrire comme la somme des réponses de deux systèmes d’ordre 1.

$$Z(t) = \frac{v_0}{\Omega} e^{-\frac{t}{\tau}} \sinh(\Omega t)$$

$$\Leftrightarrow Z(t) = \frac{v_0}{2\Omega} e^{-\frac{t}{\tau}} (e^{\Omega t} - e^{-\Omega t})$$

$$\Leftrightarrow Z(t) = \frac{v_0}{2\Omega} e^{(\Omega - \frac{1}{\tau})t} - \frac{v_0}{2\Omega} e^{(-\Omega - \frac{1}{\tau})t}$$

Soit, en posant $\tau_1 = \left(-\Omega + \frac{1}{\tau}\right)^{-1}$ et $\tau_2 = \left(\Omega + \frac{1}{\tau}\right)^{-1}$:

1. En étant honnête, un facteur 5 en ordre de grandeur ne garantit en rien la validité de l’approximation ! Mais le raisonnement à mener est bien celui-là

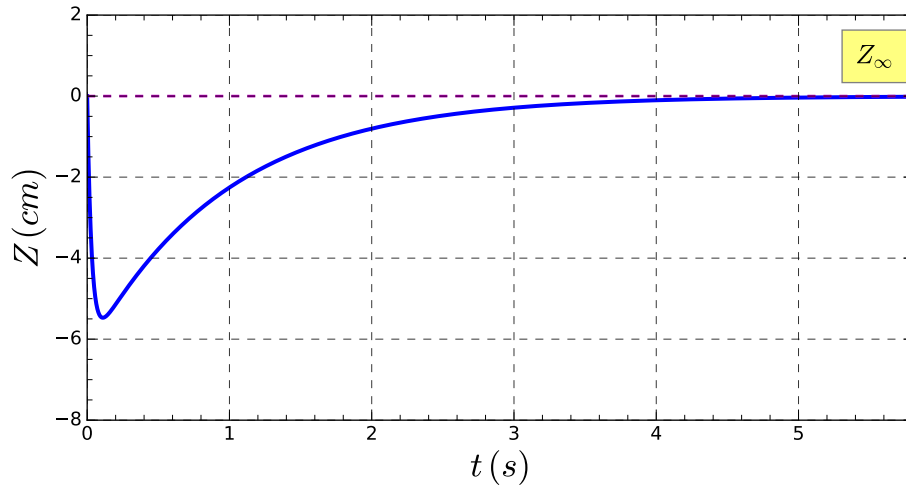


FIGURE 4 – Mouvement relatif de la caisse après descente du trottoir

$$Z(t) = \frac{v_0}{2\Omega} e^{-t/\tau_1} - \frac{v_0}{2\Omega} e^{-t/\tau_2}$$

La réponse du système est donc la superposition de la réponse de deux systèmes d’ordre 1.

3.5 Estimons alors le temps de réponse à 5% de l’amortisseur.

Calculons τ_1 et τ_2 . $\tau = \frac{2Q}{\omega_0} \approx 60 \text{ ms}$ et $\Omega \approx 15,6 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ donne $\tau_1 \approx 970 \text{ ms}$ et $\tau_2 \approx 31 \text{ ms}$. Comme $\tau_1 \gg \tau_2$, pour $t \gg \tau_2$, on peut considérer que :

$$Z(t) \approx \tilde{Z}(t) = \frac{v_0}{2\Omega} e^{-t/\tau_1}$$

Alors, le temps de réponse à 5% se calcule comme en résolvant :

$$\tilde{Z}(t_{5\%}) = 5\% \tilde{Z}(t=0)$$

qui donne $t_{5\%} \approx 3\tau_1$. A.N. : $t_{5\%} \sim 3 \text{ s}$.

4. **Effets des défauts de la route.** Dans cette partie, la route n’est plus plane. Le profil de la route est modélisé par la fonction $h(x) = h_0 \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)$ (fig.5). Dans cette partie α n’a pas de valeur a priori.

4.1 Montrons que $z_R(t) = h_m \cos(\omega t)$.

La roue reste en contact avec la route et est ponctuelle donc :

$$z_R(x) = h(x) = h_0 \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)$$

Or $x(t) = v_1 \cdot t$ d’où :

$$z_R(t) = h_0 \cos\left(\frac{2\pi v_1 t}{\lambda}\right)$$

Soit :

$$z_R(t) = h_m \cos(\omega t) \quad \text{avec} \quad h_m = h_0 \quad \text{et} \quad \omega = \frac{2\pi v_1}{\lambda}$$

Plus λ est faible plus les bosses sont rapprochées et donc plus ω est élevée : cohérent. Plus la voiture va vite, plus ω est élevée : cohérent.

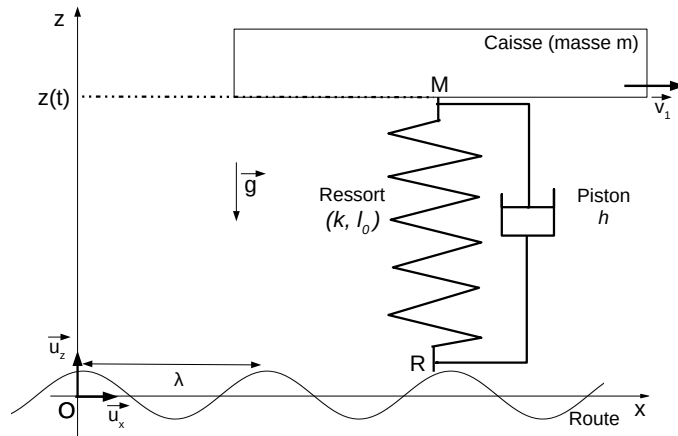


FIGURE 5 – Modélisation de la route

4.2 Montrons que l'équation différentielle vérifiée par $Z(t) = z(t) - z_e$ s'écrit :

$$\ddot{Z} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{Z} + \omega_0^2 Z = \frac{F_m(\omega)}{m} \cos(\omega t + \varphi(\omega))$$

On reprend l'équation différentielle du mouvement calculée précédemment avec z_R et \dot{z}_R non identiquement nulles.

$$\ddot{z} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{z} + \omega_0^2 z = \omega_0^2 z_e + \omega_0^2 z_R + \frac{\omega_0}{Q} \dot{z}_R$$

avec $z_R = z_R(t) = h_m \cos(\omega t)$ et $\dot{z}_R(t) = -h_m \omega \sin(\omega t)$

$$\Leftrightarrow \ddot{Z} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{Z} + \omega_0^2 Z = \omega_0^2 h_m \cos(\omega t) - \frac{\omega_0 \omega}{Q} h_m \sin(\omega t)$$

En posant $\omega_0^2 h_m \cos(\omega t) - \frac{\omega_0 \omega}{Q} h_m \sin(\omega t) = \frac{F_m}{m} \cos(\omega t + \varphi)$:

$$\boxed{\ddot{Z} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{Z} + \omega_0^2 Z = \frac{F_m}{m} \cos(\omega t + \varphi)}$$

Exprimons F_m et φ :

$$\frac{F_m}{m} \cos(\omega t + \varphi) = \frac{F_m}{m} \cos \varphi \cos(\omega t) - \frac{F_m}{m} \sin \varphi \sin(\omega t)$$

et

$$\frac{F_m}{m} \cos(\omega t + \varphi) = \omega_0^2 h_m \cos(\omega t) - \frac{\omega_0 \omega}{Q} h_m \sin(\omega t)$$

d'où :

$$\begin{cases} \frac{F_m}{m} \cos \varphi = \omega_0^2 h_m & (1) \\ \frac{F_m}{m} \sin \varphi = \frac{\omega_0 \omega}{Q} h_m & (2) \end{cases}$$

(1)² + (2)² donne :

$$\boxed{F_m = m h_m \omega_0 \sqrt{\omega_0^2 + \frac{\omega^2}{Q^2}}}$$

(2)/(1) donne :

$$\tan \varphi = \frac{1}{Q} \frac{\omega}{\omega_0}$$

4.3 Le système est linéaire et soumis à une excitation harmonique de pulsation ω donc la réponse en régime établi est harmonique de même pulsation ω :

$$Z(t) = Z_m(\omega) \cos(\omega t + \psi(\omega))$$

4.4 Exprimons l’amplitude Z_m de $Z(t)$ en fonction de ω , ω_0 , Q , et $F_m(\omega)$.

La représentation complexe de $Z(t)$, $\underline{Z}(t) = \underline{Z}_m e^{j\omega t}$ (avec $\underline{Z}_m = Z_m e^{j\psi}$) vérifie l’équation :

$$\ddot{\underline{Z}} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{\underline{Z}} + \omega_0^2 \underline{Z} = \frac{F_m}{m} e^{j(\omega t + \varphi)}$$

soit :

$$-\omega^2 \underline{Z}_m + \frac{j\omega\omega_0}{Q} \underline{Z}_m + \omega_0^2 \underline{Z}_m = \frac{F_m}{m} e^{j\varphi}$$

soit encore :

$$\underline{Z}_m = \frac{F_m(\omega) e^{j\varphi}}{m \left(\omega^2 - \omega_0^2 + \frac{j\omega\omega_0}{Q} \right)}$$

L’amplitude des oscillations de $M(m)$ est donnée par :

$$Z_m = \frac{F_m(\omega)}{m \sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \left(\frac{\omega\omega_0}{Q} \right)^2}}$$

4.5 On représente $G = 20 \log(Z_m/h_0)$ en fonction de la fréquence ω (fig.6) pour différentes valeurs de α .

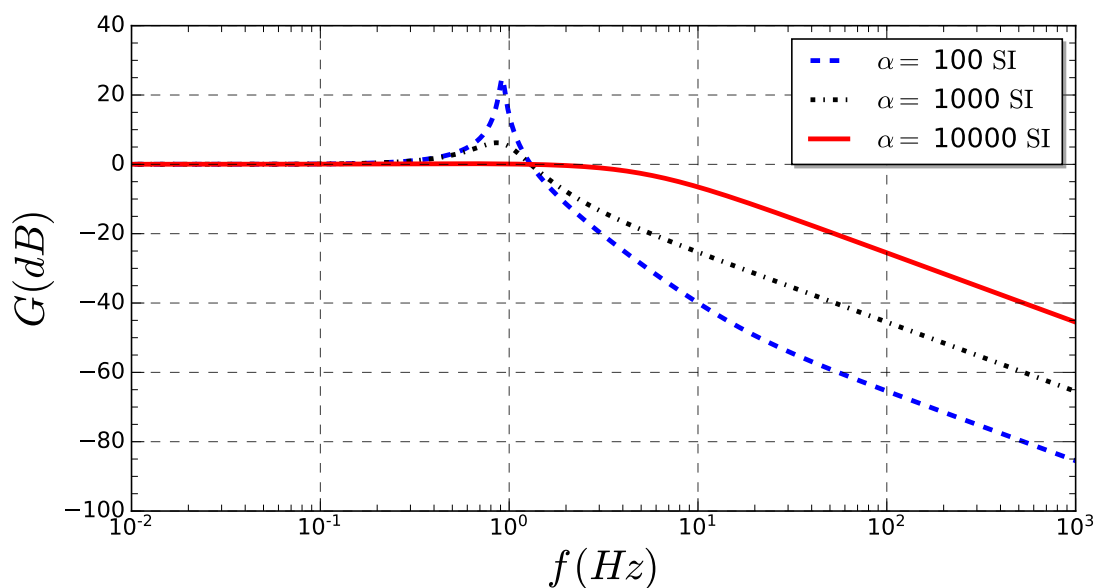


FIGURE 6 – Réponse de la suspension à une excitation harmonique de fréquence f .

- 4.5.1 Que dire de la réponse des suspensions aux aspérités de la route ?
- les suspensions se comporte comme un filtre mécanique passe-bas ;
 - la pente -40 dB à haute fréquence montre que ce filtrage est du deuxième ordre ce qui est conforme à l’expression de Z_m ;
 - si la dissipation d’énergie par l’amortisseur est suffisamment faible, il existe une résonance voisine de la fréquence propre $f_0 \sim 1$ Hz du système ;
 - cette résonance est d’autant plus forte et aiguë que la dissipation d’énergie est faible.
- 4.5.2 A basse fréquence, c’est-à-dire pour $f \ll f_0$, $G \approx 0$ soit $Z_m \approx h_0$ soit $z(t) \approx z_e + h_0 \cos(\omega t)$. La caisse suit le profil de la route : la longueur du ressort ne varie pas donc la suspension ne travaille pas. A haute fréquence c’est-à-dire pour $f \gg f_0$, $G \mapsto -\infty$ soit $Z_m \ll h_0$ soit $z(t) \approx z_e$: l’altitude de la caisse ne varie pas donc les aspérités de la route sont totalement absorbées par la suspension.
- 4.5.3 Parmi les trois valeurs de h , laquelle assure le meilleur confort aux passagers ?

En terme de confort, le but des suspension est de filtrer au mieux les vibrations due aux aspérités de la route, essentiellement sur la plage $[0, 100$ Hz] comme le montre le document 2. On constate que plus h est élevé plus l’atténuation est importante (atténuations respectives de -5 dB, -25 dB et -40 dB à 10 Hz). A priori, il faut choisir $h = 1000$ kg \cdot s $^{-1}$. Cependant, ce choix entraîne une résonance à $+25$ dB au voisinage de 1 Hz, fréquence très inconfortable pour les passagers. Finalement, le choix $h = 10\,000$ kg \cdot s $^{-1}$ semble le meilleur compromis en terme de confort.

Problème 3 – Filtrage d’un bruit électronique

On considère le filtre fig.?? de fonction de transfert :

$$\underline{H} = \frac{H_0}{1 + j\omega\tau}$$

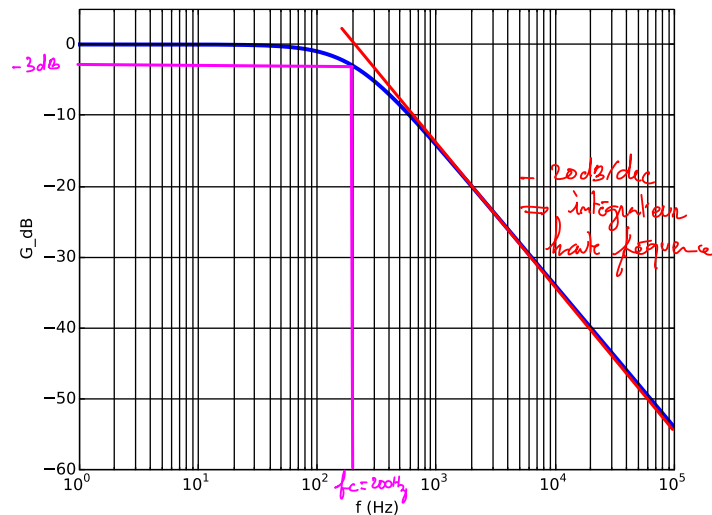


FIGURE 7 – Diagramme de Bode en gain

1. Étude du filtre

1.1 Nature du filtre :

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} |H| = H_0$$

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} |H| = 0$$

Il s’agit d’un filtre passe-bas ce que confirme plus loin l’allure du diagramme de Bode en gain.

1.2 On donne les diagrammes de Bode du filtre (fig.7 en annexe, à la dernière page de l’énoncé)

1.3 Voir fig.7. On lit $f_c = 200 \text{ Hz}$.

1.4 Par définition de la fréquence de coupure :

$$H(\omega_c) = \frac{H_0}{\sqrt{2}}$$

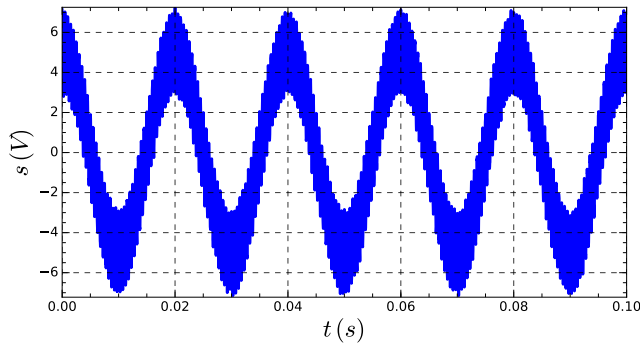
ce qui donne $f_c = \frac{1}{2\pi\tau}$ soit $\tau = \frac{1}{2\pi f_c}$. A.N. : $\tau = 0,80 \text{ ms}$.

1.5 A haute fréquence, c’est-à-dire pour $f \gg f_c$ alors $\underline{H} \approx \frac{H_0}{j \frac{f}{f_c}}$ qui est la fonction de transfert d’un intégrateur. Graphiquement, le diagramme de Bode en gain peut-être assimilé à son asymptote de pente -20 dB/dec .

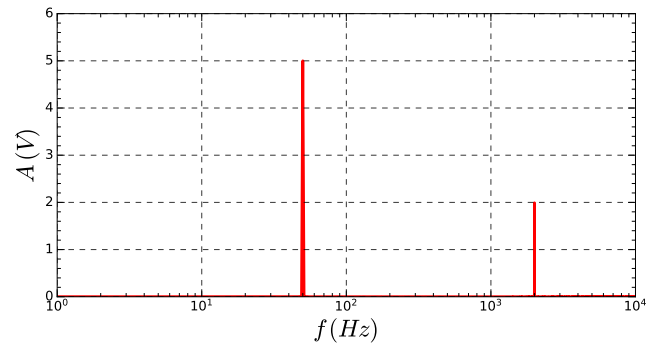
2. Utilisation du filtre

2.1 Filtrage. Le signal utile à $50 \text{ Hz} < f_c = 200 \text{ Hz}$ n’est quasiment pas atténué. Le bruit a pour fréquence $2 \text{ kHz} \approx 10 f_c$ donc l’atténuation est de l’ordre de -20 dB c’est-à-dire divisé par 10 en échelle linéaire. C’est insuffisant : il faut utiliser un filtre d’ordre supérieur.

2.2 Après filtrage, le bruit est atténué d’un facteur 10 : fig.9.

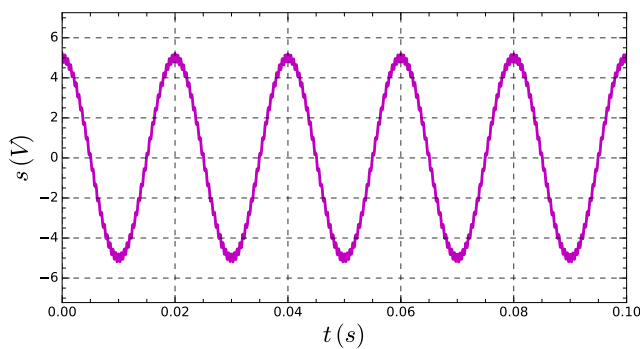


(a) Signal $s(t)$

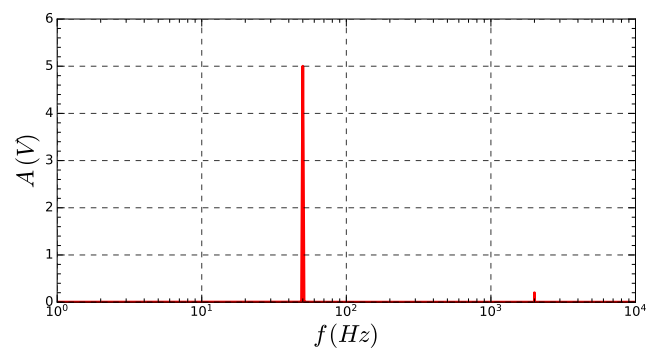


(b) Spectre de $s(t)$

FIGURE 8 – Signal bruité



(a) Signal $s(t)$



(b) Spectre de $s(t)$

FIGURE 9 – Signal filtré