Devoir Surveillé 7 – Corrigé

D.Malka – MPSI 2018-2019 – Lycée Jeanne d'Albret

16.02.2019

Problème 1 – Le pendule simple, est-ce aussi simple ?

1. **Chute libre**.

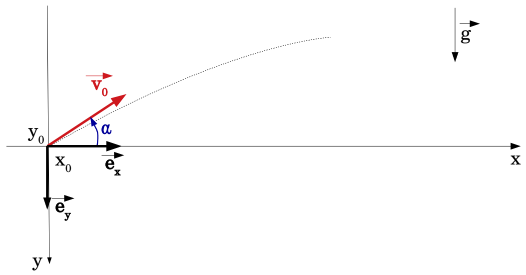


Figure 1 – Paramétrage du tir de projectile

1.1 Vitesse initiale : $\boxed{\vec{v}_0 = \cos\alpha\vec{e}_x - \sin\alpha\vec{e}_y}$

1.2 Système : projectile $M(m)$
Référentiel : $\mathcal{R}$, galiléen
Inventaire des forces (base de travail $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$) :
— le poids $\vec{P} = m\vec{g} = mg\vec{e}_y$
— et c'est tout car c'est une chute libre
2ème loi de Newton appliqué à M dans $\mathcal{R}$:

$$M\vec{a} = \vec{P}$$

En projection dans sur la base $\vec{e}_x, \vec{e}_y$:

$$\boxed{\left\{\begin{array}{l} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = g \end{array}\right.}$$

1.3 L'intégration des équations du mouvement donne de manière triviale, les équations horaires :

$$\boxed{\left\{\begin{array}{ll} x(t) = (v_0\cos\alpha)t + x_0 & (1) \\ y(t) = \dfrac{1}{2}g.t^2 - (v_0\sin\alpha)t + y_0 & (2) \end{array}\right.}$$

(1) donne $t = \dfrac{x - x_0}{v_0\cos\alpha}$. Par substitution dans (2), on trouve que la trajectoire est une parabole d'équation :

$$\boxed{y(x) = \frac{g(x-x_0)^2}{2v_0^2\cos^2\alpha} - \tan\alpha(x - x_0) + y_0}$$

2. **Le pendule simple**

2.1 **Préliminaires**

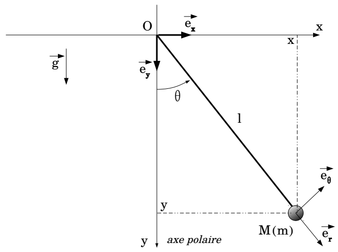


FIGURE 2 – Le pendule simple

2.1.1 $\boxed{x = l\sin\theta}$ et $\boxed{y = l\cos\theta}$

2.1.2 Vecteurs de base $\vec{e}_x$ et $\vec{e}_y$ en fonction de $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_\theta$:

$$\boxed{\vec{e}_x = -\sin\theta\vec{e}_r + \cos\theta\vec{e}_\theta} \quad \boxed{\vec{e}_y = \cos\theta\vec{e}_r - \sin\theta\vec{e}_\theta}$$

2.1.3 Si le fil est tendu, la trajectoire de M est un arc de cercle de rayon l d'où la vitesse $\vec{v}$ du pendule dans la base $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_\theta$

$$\boxed{\vec{v} = l\dot{\theta}\vec{e}_\theta}$$

2.2 Équations du mouvement - Régime d'oscillation

2.2.1 Inventaire des forces (base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$) :

— le poids $\vec{P} = m\vec{g} = mg\vec{e}_y = \begin{pmatrix} mg\cos\theta \\ -mg\sin\theta \end{pmatrix}$

— la tension du fil $\vec{T} = T\vec{e}_r = \begin{pmatrix} T \\ 0 \end{pmatrix}$

2.2.2 Équations du mouvement vérifiée par θ. On applique la 2ème loi de Newton à M dans $\mathcal{R}$:

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{T} \qquad \text{avec} \qquad \vec{a} = \begin{pmatrix} -ml\dot{\theta}^2 \\ ml\ddot{\theta} \end{pmatrix}$$

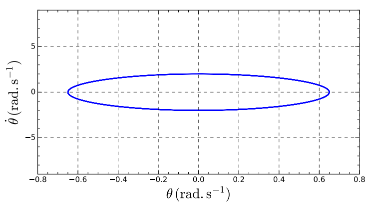
En projection sur la base polaire :

$$\begin{cases} -ml\dot{\theta}^2 = mg\cos\theta + T & (1) \\ ml\ddot{\theta} = -mg\sin\theta & (2) \end{cases}$$

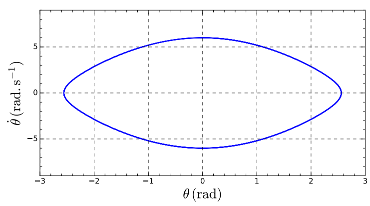
Soit avec $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{g}{l}}$:

$$\boxed{\begin{cases} \dot{\theta}^2 = -\omega_0^2\cos\theta - \dfrac{T}{ml} & (1) \\ \ddot{\theta} + \omega_0^2\sin\theta = 0 & (2) \end{cases}}$$

2.2.3 La résolution des équations du mouvement pour deux valeurs différentes $v_{0,1}$ et $v_{0,2}$ de la vitesse initiale conduit aux trajectoires de phases fig.3.



(a) $v_0 = v_{0,1}$



(b) $v_0 = v_{0,2}$

FIGURE 3 – Trajectoires de phase de la masselotte M

Comparons $v_{0,1}$ et $v_{0,2}$. $v = l|\dot{\theta}|$, pour $\theta = 0$, $|\dot{\theta}_1| \approx 2\,\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1}$ et $|\dot{\theta}_1| \approx 6\,\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1}$ donc $v_{0,2} \approx 3v_{0,1}$.s

La première trajectoire de phase est elliptique. Le pendule se comporte donc comme un oscillateur harmonique. Ceci est cohérent avec l'équation (2) du mouvement :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin\theta = 0$$

qui se linéarise en :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$$

pour une petite amplitude de vibration donc pour une faible excitation initiale. On reconnaît l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation propre ω_0.

La deuxième trajectoire est fermé donc le pendule oscille mais la trajectoire de phase n'est pas une ellipse : les oscillations sont anharmoniques. Ceci est conforme à l'équation :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin\theta = 0$$

La linéarisation précédente n'est plus valable car l'amplitude des oscillations est grande.

2.3 Toujours un régime d'oscillation ?

2.3.1 Le fil reste tendu à condition que la tension T soit négative.

2.3.2 L'équation (1) donne :

$$\frac{T}{ml} = -(\omega_0^2\cos\theta + \dot{\theta}^2)$$

Il est évident que si $\theta < \frac{\pi}{2}$ alors $\omega_0^2\cos\theta > 0$ et donc $T < 0$. En en conclue que l'angle θ_c au delà duquel le fil n'est plus tendu est au moins supérieur à $\frac{\pi}{2}$:

$$\boxed{\theta_c \geq \frac{\pi}{2}}$$

2.3.3 Montrons que :

$$\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 - \omega_0^2\cos\theta = C$$

On part de l'équation (2) :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin\theta = 0$$

$$\Rightarrow \dot{\theta}\ddot{\theta} + \omega_0^2\dot{\theta}\sin\theta = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\dot{\theta}^2\right) + \omega_0^2\frac{d}{dt}(-\cos\theta) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 - \omega_0^2\cos\theta\right) = 0$$

En intégrant par rapport au temps, il vient :

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 - \omega_0^2\cos\theta = C} \quad (3)$$

On a déterminé une constante du mouvement. le premier terme s'apparente à l'énergie cinétique du pendule et le deuxième terme s'apparente à l'énergie potentielle de pesanteur. L'équation traduit donc la conservation de l'énergie mécanique du pendule.

2.3.4 Expression de l'angle θ_c au delà duquel le fil n'est plus tendu. L'équation (1) donne :

$$\frac{T}{ml} = -(\omega_0^2 \cos\theta + \dot{\theta}^2)$$

or (3) fournit :

$$\dot{\theta}^2 = 2C + 2\omega_0^2 \cos\theta$$

d'où :

$$\frac{T}{ml} = -(3\omega_0^2 \cos\theta + 2C)$$

Ainsi, la condition de tension du fil $T \leq 0$ s'écrit :

$$3\omega_0^2 \cos\theta + 2C \geq 0$$

soit

$$\cos\theta \geq -\frac{2C}{3\omega_0^2}$$

Donc le fil n'est plus tendu si :

$$\cos\theta \leq -\frac{2C}{3\omega_0^2}$$

$$\boxed{\cos\theta \leq \cos\theta_c} \qquad \text{avec} \qquad \boxed{\cos\theta_c = -\frac{2C}{3\omega_0^2}}$$

Comme $\theta_c \in [\pi/2, \pi]$ alors $\theta_c = \arccos\left(-\frac{2C}{3\omega_0^2}\right)$.

☞ *En fait, si* $\frac{2C}{3\omega_0^2} > 1$ *soit* $C > \frac{3}{2}\omega_0^2$ *soit* $E_m > 2mgl$ *, le fil reste toujours tendu : le pendule accompli des révolutions complète autour de* O.

2.3.5 A partir de $\theta = \theta_c$, le fil n'est plus tendu donc seul le poids s'applique à M : la masselotte est en chute libre. Ce casa été traité dans la première partie du problème. L'équation de la trajectoire s'écrivait avec un paramétrage identique pour les axes Ox et Oy :

$$\boxed{y(x) = \frac{g(x-x_0)^2}{2v_0^2 \cos^2\alpha} - \tan\alpha(x-x_0) + y_0}$$

Il reste à identifier α, x_0, y_0 et v_0.
— $\alpha = \theta_c - \frac{\pi}{2}$.
— $x_0 = l\sin\theta_c$ et $y_0 = l\cos\theta_c$.
— $v_0 = l|\dot{\theta}_c|$ avec ${\dot{\theta}_c}^2 = 2C + 2\omega_0^2\cos\theta_c$ et $\cos\theta_c = -\frac{2C}{3\omega_0^2}$ d'où $|\dot{\theta}_c| = \sqrt{\frac{2C}{3}}$ et donc $v_0 = l\sqrt{\frac{2C}{3}}$.

Ainsi, l'équation de la trajectoire de la phase de chute libre est :

$$\boxed{y(x) = \frac{3g(x - l\sin\theta_c)^2}{4Cl^2\sin^2\theta_c} - \frac{(x - l\sin\theta_c)}{\tan\theta_c} + l\cos\theta_c}$$

2.3.6 Le fil se tend à nouveau lorsque la distance $r = \sqrt{x^2+y^2}$ au point O est à nouveau égale à l.

2.3.7 On peut supposer que le fil « percute » et qu'il en résulte une dissipation importante de l'énergie mécanique du pendule et donc que mouvement qui suit est une oscillation de plus faible amplitude. Elle est donc tel que $\theta < \theta_c$ à chaque instant et on n'observe pas de nouveau décrochage du pendule.

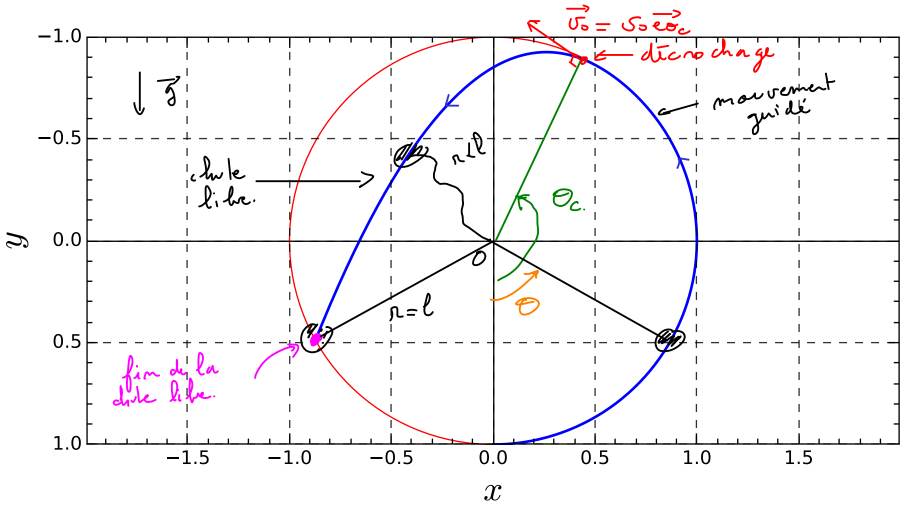


FIGURE 4 – Mouvement du pendule s'il y décrochage de la trajectoire circulaire

Problème 2 – Titrage de l'éthanol dans le vin : degré alcoolique

Document 1 – Principe, protocole et résultats du titrage

Principe. Le degré alcoolique d'un vin est le pourcentage volumique d'alcool mesuré à 20 °C. Pour déterminer le degré alcoolique d'un vin, il faut d'abord isoler l'alcool des autres composés du vin (acides, matières minérales, sucres,. . .) en réalisant une distillation. Cette méthode de séparation ne permet pas d'obtenir de l'éthanol pur mais un mélange eau-éthanol. La solution aqueuse d'éthanol obtenue est ensuite ajustée avec de l'eau distillée. On complétera à 100 mL pour simplifier les calculs. L'alcool est ensuite totalement oxydé en acide éthanoïque (ou acétique) par un excès de dichromate de potassium selon la réaction totale :

$$2Cr_2O_7^{2-}(aq) + 3CH_3CH_2OH(aq) + 16H^+(aq) = 4Cr^{3+}(aq) + 3CH3COOH(aq) + 11H_2O(l)$$

Les ions dichromate excédentaires sont alors titrés par une solution de sel de Mohr de formule suivant la réaction totale :

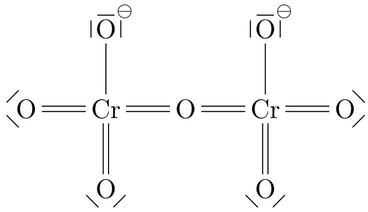
$$2Cr_2O_7^{2-}(aq) + 6Fe^{2+}(aq) + 14H^+(aq) = 2Cr^{3+}(aq) + 6Fe^{3+} + 7H_2O(l)$$

Protocole et résultats. On prélève $V_v = 10{,}0\,\text{mL}$ de vin auxquels on ajoute environ 50 mL d'eau. On distille ce mélange et on recueille un volume de 42 mL de distillat. On admettra que le distillat contient tout l'éthanol du vin. On complète à 100 mL avec de l'eau distillée pour obtenir la solution S_1. Dans un erlenmeyer, on mélange un volume $V_0 = 10{,}0\,\text{mL}$ de la solution S_1 obtenue, un volume $V_1 = 20{,}0\,\text{mL}$ d'une solution de dichromate de potassium de concentration $C_1 = 0{,}100\,\text{mol}\cdot\text{L}^{-1}$ et environ 10 mL d'acide sulfurique concentré. On bouche l'erlenmeyer et on laisse réagir pendant environ 30 min. On obtient alors une solution S_2 verdâtre. On titre les ions dichromates en excès avec une solution de sel de Mohr de concentration $C_2 = 0{,}500\,\text{mol}\cdot\text{L}^{-1}$ en ions Fe^{2+} . On repère le volume équivalent à l'aide d'un indicateur de fin de réaction et on note une valeur $V_2 = 7{,}6\,\text{mL}$.

On donne la valeur de la masse volumique de l'éthanol pur $\rho = 0{,}78\,\text{g}\cdot\text{mL}^{-1}$.

1. Modèle de Lewis proposé pour l'ion dichromate $Cr_2O_7^{2-}$.

   On dénombre les électrons de valences puis les doublets à placer.
   Cr : $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 \underline{3d^5 4s^1}$ donc 6 électrons de valence
   O : $1s^2 \underline{2s^2 2p^4}$ donc 6 électrons de valence
   Donc $N_{e^-} = 2 \times 6 + 7 \times 6 + 2e^- = 56\text{e}^-$ soit $D = 28$ doublets à répartir.
   14 doublets sont déjà agencés sur le schéma proposé. On répartit les 14 restant de façon à ce que les atomes d'oxygène vérifie la règle de l'octet. On ajoute ensuite les charges formelles.



2. Il y a la même quantité d'éthanol dans le distillat que dans les 10,0 mL de vin donc : $n' = n$. De même la dilution opérée lors de la préparation de S_1 ne modifie pas n. La solution S_1 a pour concentration $C_{S_1} = \dfrac{n}{V}$ en notant $V = 100\,\text{mL}$ son volume. Le volume V_0 prélevé de S_1 puis titré contient donc la quantité $n'' = C_{S_1}V_0 = \dfrac{V_0}{V}n$.
3. À l'équivalence, les réactifs ont été introduits dans les proportions stœchiométriques.
4. D'après l'équation de la réaction de titrage :

$$2Cr_2O_7^{2-}(aq) + 6Fe^{2+}(aq) + 14H^+(aq) = 2Cr^{3+}(aq) + 6Fe^{3+} + 7H_2O(l)$$

les ions H^+ étant en large excès, l'équivalence se traduit mathématiquement par :

$$n_{Cr_2O_7^{2-},\text{titrée}} = \frac{n_{Fe^{2+},\text{ajoutée}}}{6}$$

Soit

$$\boxed{n_{Cr_2O_7^{2-},\text{titrée}} = \frac{C_2V_2}{6}}$$

A.N. : $n_{Cr_2O_7^{2-},\text{titrée}} = 6{,}33 \times 10^{-4}\,\text{mol}$

5. Quantité de matière n'' en éthanol présent dans le volume V_0 de la solution S_1.

La quantité de dichromate titrée est en fait l'excès de dichromate n'ayant pas réagi selon la réaction d'équation :

$$2Cr_2O_7^{2-}(aq) + 3CH_3CH_2OH(aq) + 16H^+(aq) = 4Cr^{3+}(aq) + 3CH3COOH(aq) + 11H_2O(l)$$

Soit

$$n_{Cr_2O_7^{2-},\text{titrée}} = n_{Cr_2O_7^{2-},\text{excès}} = n_{Cr_2O_7^{2-},\text{initiale}} - n_{Cr_2O_7^{2-},\text{consommée}}$$

Or $n_{Cr_2O_7^{2-},\text{initiale}} = C_1V_1$ et $n_{Cr_2O_7^{2-},\text{consommée}} = \dfrac{2}{3}n_{\text{ethanol,initiale}} = \dfrac{2}{3}n''$ d'où :

$$\boxed{n'' = \frac{3}{2}\left(C_1V_1 - n_{Cr_2O_7^{2-},\text{titrée}}\right)}$$

A.N. : $n'' = 2{,}05 \times 10^{-3}\,\text{mol}$

6. Le degré alcoolique du vin analysé s'écrit par définition :

$$d = \frac{V_{\text{ethanol}}}{V_v}$$

avec $V_{\text{ethanol}} = \dfrac{m_{\text{ethanol}}}{\rho} = \dfrac{nM_{\text{ethanol}}}{\rho}$:

$$\boxed{d = \frac{nM_{\text{ethanol}}}{\rho V_v}}$$

$M_{\text{ethanol}} = 46\,\text{g}\cdot\text{mol}^{-1}$ et il reste donc à déterminer la quantité de matière n présente dans les $V_v = 10{,}0\,\text{mL}$ de vin analysé.

Nous avons vu que :

$$n = \frac{V}{V_0}n''$$

D'où, finalement :

$$\boxed{d = \frac{n'' M_{\text{ethanol}} V}{\rho V_v V_0}}$$

A.N. : $d = 12{,}0\,°$. Cohérent.