



# DS7 – PHYSIQUE-CHIMIE – CORRIGÉ

D.Malka – MPSI 2019-2020 – Lycée Jeanne d'Albret

14.03.2020

## Problème 1 – Effets quantiques dans les conducteurs

### 1. Quantification de l'orbite cyclotron des électrons dans un champ magnétique.

#### 1.1 Orbites cyclotron classiques

1.1.1 L'électron subit la partie magnétique de la force de Lorentz :

$$\vec{F}_m = -e\vec{v} \wedge \vec{B}$$

1.1.2 Voir fig.1.

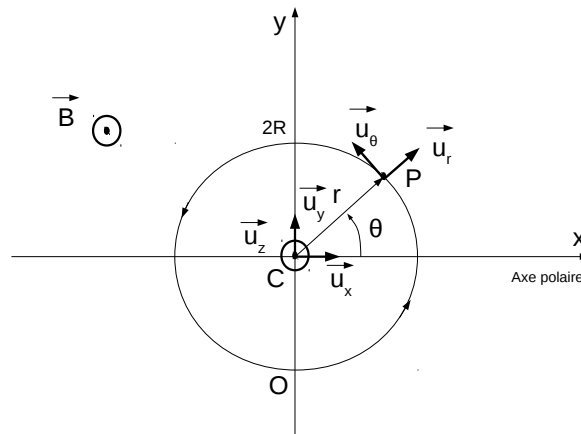


FIGURE 1 – Trajectoire de l'électron dans le champ magnétique  $\vec{B}$

1.1.3 Initialement, au point  $O$ , la force subie par l'électron s'écrit :  $\vec{F}_{m,0} = -e\vec{v}_0 \wedge \vec{B} = eBv_0\vec{u}_y$ . On en conclut que le cercle est parcouru en sens trigonométrique dans le demi-plan  $y \geq 0$ .

1.1.4 Le travail de la partie magnétique de la force de Lorentz est nul par essence (car  $\vec{dl} \perp \vec{v} \wedge \vec{B}$ ).

D'après le théorème de l'énergie cinétique  $E_c = \frac{1}{2}mv^2 = cste$  et donc  $v = v_0 = cste$ .

1.1.5 La relation fondamentale de la dynamique appliquée à l'électron donne :

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_L}{m} \quad (\spadesuit)$$

Avec l'accélération  $\vec{a}$  de l'électron s'écrivant :

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{u}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{u}_\theta$$

or  $r = R = cste$  donc  $\dot{r} = 0$  et  $\ddot{r} = 0$ .

D'autre part,  $v = v_0 = cste = r\dot{\theta}$  donc  $\dot{\theta} = cste$  et  $\ddot{\theta} = 0$ .

Enfin  $\dot{\theta} = \frac{v_0}{R}$  d'où :

$$\vec{a} = -\frac{v_0^2}{R}\vec{u}_r$$

Alors :

$$(\spadesuit) \Leftrightarrow -\frac{v_0^2}{R}\vec{u}_r = -\frac{ev_0B}{m}\vec{u}_r$$

$$\Leftrightarrow \boxed{R = \frac{mv_0}{eB}}$$

D’autre part, par définition  $\dot{\theta} = \omega_c$  et  $\dot{\theta} = \frac{v_0}{R} = \frac{eB}{m}$  donc :

$$\boxed{\omega_c = \frac{eB}{m}}$$

A.N. :  $f_c = 2,83 \times 10^{10}$  Hz.

## 1.2 Quantification du mouvement cyclotron

1.2.1 Rayon  $R_n$  de l’orbite :

$$2\pi R_n = (n + \gamma)\lambda_B$$

$$R_n = \frac{1}{2\pi}(n + \gamma)\frac{h}{p}$$

$$R_n = (n + \gamma)\frac{\hbar}{mv_0 - eB\frac{R_n}{2}}$$

or  $mv_0 = eBR_n$  d’où :

$$R_n = \frac{n + \gamma}{\frac{eBR_n}{2}}$$

$$R_n^2 = 2\frac{(n + \gamma)\hbar}{eB}$$

$$R_n = \sqrt{2\frac{(n + \gamma)\hbar}{eB}}$$

En posant  $\boxed{l_B = \sqrt{\frac{\hbar}{eB}}}$ , il vient :

$$\boxed{R_n = \sqrt{2(n + \gamma)}l_B}$$

Les orbites accessibles sont quantifiées !

1.2.2 Énergie cinétique  $\frac{1}{2}mv^2$  de la particule sur la trajectoire de rayon  $R_n$  :

$$\mathcal{E}_n = \frac{1}{2}mv_0^2$$

avec  $v_0 = R_n\omega_c = \sqrt{2(n + \gamma)}l_B\omega_c^2$

d’où :

$$\mathcal{E}_n = \frac{1}{2}m \times 2(n + \gamma)\frac{\hbar}{eB}\frac{eB}{m}\omega_c$$

$$\boxed{\mathcal{E}_n = (n + \gamma)\hbar\omega_c}$$

Les énergies accessibles sont quantifiées !

1.2.3  $k_B T$  et  $\hbar\omega_c$  ont la dimension d’une énergie donc on peut proposer  $T_0$  telle que :

$$k_B T_0 = \hbar\omega_c \Leftrightarrow T_0 = \frac{\hbar\omega_c}{k_B}$$

A.N.  $T_0 \approx 1,3 \text{ K}$ .

1.2.4 Absorption de photons par l’électron dans un champ magnétique.

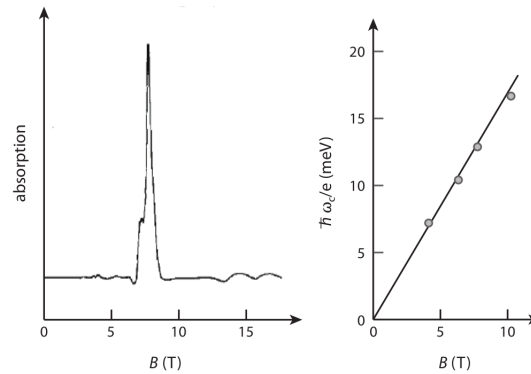


FIGURE 2 – Réponse du semi-conducteur, plongé dans une champ magnétique uniforme et stationnaire, à un faisceau laser de longueur d’onde  $\lambda = 96 \mu\text{m}$ .

1.2.4.1 La fonction  $\frac{\pi\hbar\omega_c}{e}$  en fonction de  $B$  doit avoir une pente  $\hbar/m$ . Le calcul donne :

$$\frac{\hbar}{m} = \frac{17 \cdot 10^{-3}}{10}$$

Soit  $m = 6,32 \times 10^{-32} \text{ kg}$ . Ce n’est pas la masse de l’électron libre. On la note masse effective  $m^*$  de l’électron dans le semi-conducteur. Elle résulte de l’interaction de l’électron avec le réseau cristallin.

1.2.4.2 On observe une absorption résonnante autour de  $B = 8 \text{ T}$ . Pour qu’il y ait absorption du photon, par conservation de l’énergie, il faut :

$$E_n - E_m = h\nu = \frac{hc}{\lambda} = 2\pi \frac{\hbar c}{\lambda}$$

avec transition de l’électron de l’orbite  $p = 0$  vers l’orbite  $n$  telle que :

$$E_n - E_m = (n - p)\hbar\omega_c = n \frac{\hbar e B}{m^*}$$

D’où :

$$n \frac{\hbar e B}{m^*} = 2\pi \frac{\hbar c}{\lambda}$$

$$n = 2\pi \frac{m^* c}{\lambda e B}$$

trouve  $n = 0,97 \approx 1$  aux erreurs de mesures sur le champ  $B$ . Il y a transition des électrons du niveau  $p = 0$  au niveau  $n = 1$  par absorption d’un photon de longueur d’onde  $\lambda = 96 \mu\text{m}$  à condition que  $B = 8 \text{ T}$ .

## 2. Effet Aharonov-Bohm

Nous nous intéressons aux interférences d’ondes de matière chargées soumises à un champ magnétique. Pour cela nous considérons dans un premier temps le système d’interférences optiques dit des fentes d’Young. Nous donnons une interprétation géométrique de la figure d’interférences en termes différence de marche entre les deux trajectoires issues de chacune des fentes d’Young et nous l’appliquons à des particules chargées en présence d’un champ magnétique. Enfin, nous opérons par analogie avec les fentes d’Young pour interpréter l’effet Aharonov-Bohm dans un semi-conducteur en forme d’anneau.

On considère donc le système des fentes d’Young. Sous l’effet d’une onde lumineuse incidente, les points  $A_1$  et  $A_2$  émettent en phase deux ondes harmoniques, de longueur d’onde  $\lambda$ , d’expressions respectives  $s_1(M, t) = s_0 \cos(\omega t)$  et  $s_2(M, t) = s_0 \cos(\omega t + \delta\phi)$  au point  $M$  (fig.3).

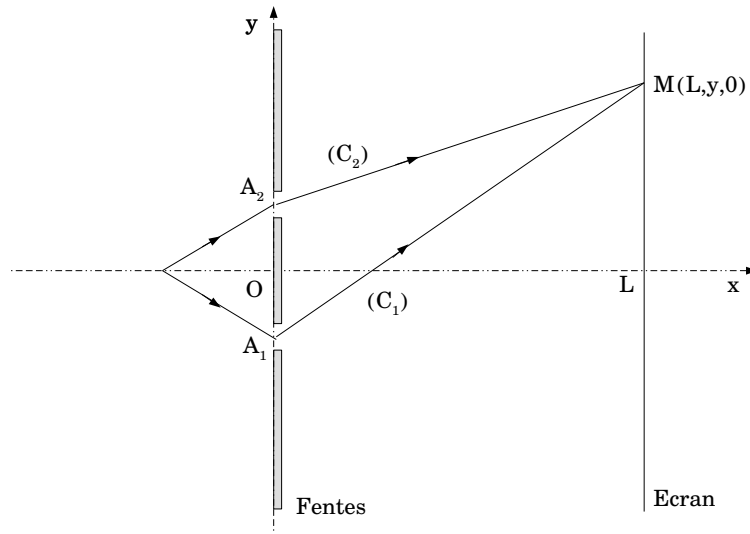


FIGURE 3 – Le dispositif des fentes d’Young. Coordonnées de  $A_1 : (0, d/2, 0)$ , coordonnées de  $A_2 : (0, -d/2, 0)$ . Dans les conditions d’utilisation,  $y \ll L$  et  $d \ll L$ .

### 2.1 Intensité lumineuse $I$ sur l’écran.

$$I = \alpha \langle s(t)^2 \rangle$$

Calculons  $s(t)$  :

$$s(t) = s_1(t) + s_2(t)$$

$$s(t) = s_0(\cos(\omega t) + \cos(\omega t + \delta\phi))$$

$$s(t) = 2s_0 \cos(2\omega t + \delta\phi) \cos(\delta\phi)$$

D’où l’intensité :

$$I = 4\alpha I_0 \langle \cos^2(2\omega t + \delta\phi) \rangle \langle \cos^2(\delta\phi/2) \rangle$$

$$I = 2\alpha I_0 \cos^2(\delta\phi/2) = \alpha I_0 (1 + \cos \delta\phi)$$

### 2.2 Différence de marche entre les chemins $(C_2)$ et $(C_1)$ :

$$\delta = A_1M - A_2M$$

avec :

$$A_2M = \sqrt{L^2 + (y - d/2)^2} = L\sqrt{1 + \frac{(y - d/2)^2}{L^2}} = L\left(1 + \frac{1}{2L^2}(y - d/2)^2 + o(y^2/L^2) + o(d^2/L^2)\right)$$

De même :

$$A_1M = \sqrt{L^2 + (y + d/2)^2} = L\sqrt{1 + \frac{(y + d/2)^2}{L^2}} = L\left(1 + \frac{1}{2L^2}(y + d/2)^2 + o(y^2/L^2) + o(d^2/L^2)\right)$$

Alors :

$$\delta \approx \frac{1}{2L}(y + d/2)^2 - \frac{1}{2L}(y - d/2)^2$$

$$\delta \approx \frac{d \cdot y}{L}$$

D’où le déphasage  $\delta\phi$  au point  $M$  :

$$\delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{d \cdot y}{L}$$

2.3 Intensité  $I(y)$ .

$$I(y) = \alpha I_0 \left( 1 + \cos \left( \frac{2\pi}{\lambda} \frac{d \cdot y}{L} \right) \right)$$

Les interférences sont constructives si  $I(y_p)$  est maximale ce qui est équivalent à :

$$\cos \left( \frac{2\pi}{\lambda} \frac{d \cdot y}{L} \right) = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{d \cdot y_p}{\lambda L} = p \quad p \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow y_p = p \frac{\lambda L}{d} \quad p \in \mathbb{Z}$$

2.4 En présence du champ magnétique, le déphasage devient  $\delta\phi' = \delta\phi + \delta\phi_B$  et l’intensité devient donc :

$$I'(y) = \alpha I_0 \left( 1 + \cos \left( \frac{2\pi}{\lambda} \frac{d \cdot y}{L} + \delta\phi_B \right) \right)$$

$$I'(y) = \alpha I_0 \left( 1 + \cos \left( \frac{2\pi}{\lambda} \frac{d}{L} \left( y + \frac{L\lambda}{2\pi d} \delta\phi_B \right) \right) \right)$$

$$I'(y) = I(y') \quad \text{avec} \quad y' = y + \frac{L\lambda}{2\pi d} \delta\phi_B$$

L’intensité est translatée de la distance  $a = \frac{L\lambda}{2\pi d} \delta\phi_B$  vers les  $y$  décroissants.

2.5 On suppose que les courants électriques empruntant chacun des côté de l’anneau se recombine ensuite de telle sorte l’intensité électrique  $I_e$  est équivalent à l’intensité lumineuse  $I$  sur l’écran des fentes d’Young.

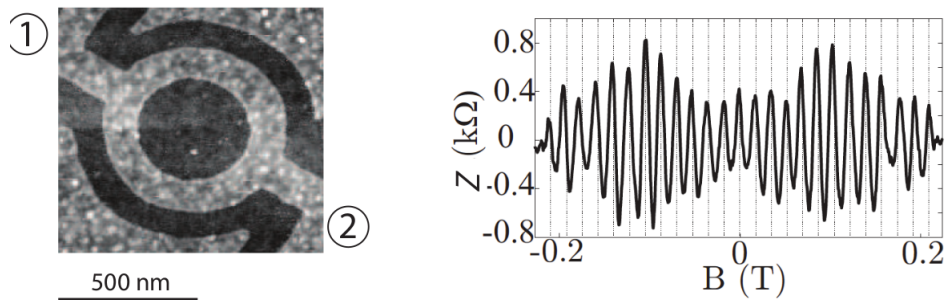


FIGURE 4 – Fluctuation de la résistance  $Z$  d’un semi-conducteur en forme d’anneau de rayon  $R = 270$  nm en fonction du champ magnétique  $B$

Alors :

$$I_e = K(1 + \cos(\delta\phi + \delta\phi_B))$$

Ici, les deux chemins ( $C_1$ ) et ( $C_2$ ) sont identiques donc :

$$I_e = K(1 + \cos(\delta\phi_B)) = K \left( 1 + \cos \left( \frac{e\pi R^2}{\hbar} B \right) \right)$$

D’où l’expression de l’impédance :

$$Z = \frac{U}{I} = \frac{U}{K \left( 1 + \cos \left( \frac{e\pi R^2}{\hbar} B \right) \right)}$$

On voit que les valeurs de  $B$  annulant  $I_e$  donne une impédance infini (maximale dans les faits), et que les valeurs de  $B$  maximisant  $I_e$  donne une impédance minimale et ce de façon périodique ce qui est ce qu’on observe grossièrement expérimentalement. Plus précisément, on peut évaluer le temps caractéristique des fluctuations de  $Z$  avec  $B$  comme la période de l’expression précédente :

$$\Delta B = \frac{2\hbar}{eR^2}$$

A.N. :  $\Delta B \approx 18$  mT. Graphiquement, on trouve que 22 pseudo-périodes sur 40 mT soit  $\Delta B_{exp} = 18$  mT ce qui est cohérent.

## Problème 2 – Le cuivre et l’un de ses minerais, la chalcopryrite

### 1. L’élément cuivre

- 1.1 Le cuivre est  $^{63}\text{Cu}$  comprend 29 protons et  $63 - 29 = 34$  neutrons.
- 1.2  $\text{Cu} : 1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^1$  : stabilisation par saturation de la sous-couche  $3d$  et/ou couche  $3d$  moins énergétique que la  $4s$ .
- 1.3 Le cuivre  $^{64}\text{Cu}$  est radioactif (fig.5) :

$^{64}\text{Cu} =$  produits de désintégration

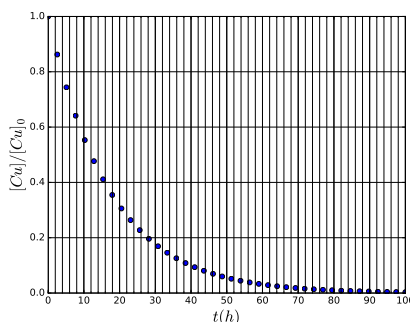


FIGURE 5 – Désintégration radioactive du cuivre  $^{64}\text{Cu}$

- 1.3.1 Graphiquement, on lit  $t_{1/2} \approx 12$  h.
- 1.3.2 Loi cinétique de la désintégration de  $^{64}\text{Cu}$  d’ordre 1 donc :

$$\frac{d[\text{Cu}]}{dt} = -k[\text{Cu}]$$

de solution :

$$[\text{Cu}] = [\text{Cu}]_0 e^{-kt}$$

On en déduit que :

$$[Cu](t_{1/2}) = [Cu]_0 e^{-kt_{1/2}} = \frac{[Cu]_0}{2}$$

D'où :

$$k = \frac{\ln 2}{t_{1/2}}$$

A.N. :  $k = 1,6 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$

## 2. Structure cristalline du cuivre métallique

Le cuivre métallique cristallise suivant le système cubique à faces centrées de paramètre de maille  $a$ . On supposera que les atomes de cuivre les plus proches sont en contact.

2.1 Maille conventionnelle du cuivre métallique : fig.6.

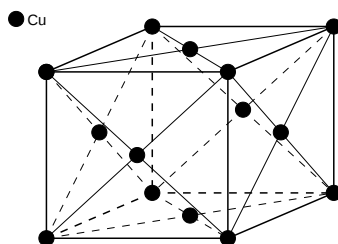


FIGURE 6 – Maille du cuivre

2.2 La maille de cuivre contient 4 atomes de cuivre.

2.3 Paramètre de maille  $a$ . Tangence des atomes de cuivre plus proches voisins suivant la diagonale d'une face d'un cube :

$$\sqrt{2}a = 4r_{Cu} \Leftrightarrow r_{Cu} = 2\sqrt{2}a$$

A.N. :  $a = 359,2 \text{ pm}$

2.4 Compacité :

$$c = \frac{V_{\text{atomes}}}{V_{\text{mailles}}}$$

avec  $V_{\text{mailles}} = a^3$ ,  $V_{\text{atomes}} = \frac{4}{3}r_{Cu}^3$ .

$$c = \frac{4}{3} \pi \frac{r_{Cu}^3}{a^3}$$

A.N. :  $c = 74\%$

2.5 Masse volumique :

$$\rho = \frac{4M_{Cu}}{N_A a^3}$$

A.N. :  $\rho = 9,13 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$

## 3. La chalcopyrite

La chalcopyrite est un minerai mixte de cuivre et de fer de formule chimique :  $CuFeS_2$ .

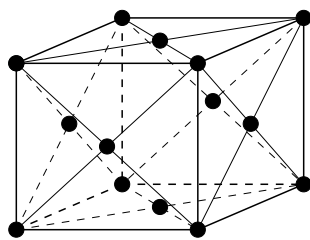


FIGURE 7 – La chalcopryte. Ne sont représentés que les ions  $S^{2-}$ .

3.1 La configuration électronique  $3s^23p^63d^{10}$  montre que le cuivre a perdu uniquement l’électron sur la couche  $3d$  et a donc formé l’ion  $Cu^+$ . Soit  $q_{Fe}$  la charge du fer. L’électronneutralité du cristal impose :

$$q_{Cu} + q_{Fe} + 2q_S = 0$$

Or le soufre est présent sous la forme d’ions  $S^{2-}$  donc  $q_S = -2e$  d’où :

$$-4e + q_{Fe} + e = 0 \Leftrightarrow q_{Fe} = 3e$$

Le fer est présent sous forme d’ions  $Fe^{3+}$ .

3.2 Une maille contient 4 ions soufre  $S^{2-}$  et deux fois moins de fer donc 2 ions  $Fe^{3+}$  et deux fois moins de cuivre donc 2 ions  $Cu^+$ .

3.3 Fraction massiques :

$$\omega_S = \frac{4M_S}{M} \quad \omega_{Fe} = \frac{2M_{Fe}}{M} \quad \omega_{Cu} = \frac{2M_{Cu}}{M} \quad \text{avec} \quad M = 4M_S + 2M_{Fe} + 2M_{Cu}$$

A.N. :  $\omega_S = 35,0\%$ ,  $\omega_{Fe} = 30,4\%$ ,  $\omega_{Cu} = 34,6\%$ .

3.4 Sachant que le paramètre de maille vaut 580 pm, la structure formée par les anions est-elle compacte ?

Déterminons s’il y a contact entre les anions plus proches voisins. Si c’est le cas, la tangence se fait suivant la diagonale d’une face d’un carré de longueur  $\sqrt{2}a = 820$  pm. Le long de cette diagonale, les ions soufres occupent la longueur  $4r_{S^{2-}} = 720$  pm.  $\sqrt{2}a > 4r_{S^{2-}}$  donc les anions plus proches voisins ne sont pas en contact : la structure n’est pas compacte.

3.5 Sites interstitiels : fig.8.

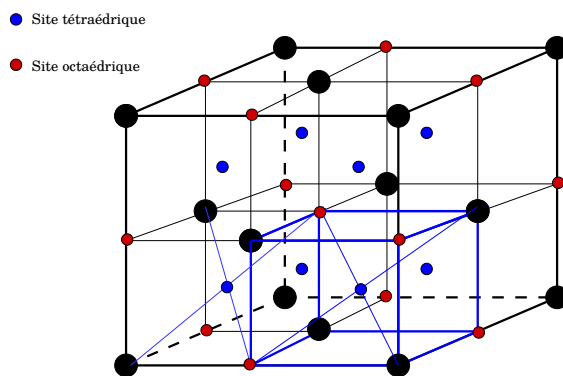


FIGURE 8 – Sites interstitiels de la maille cubique faces centrées

3.6 Habitabilité d’un site tétraédrique : fig.9.

$$r_T + r_{S^{2-}} = \frac{\sqrt{3}}{4}a$$

$$r_T = \frac{\sqrt{3}}{4}a - r_{S^{2-}}$$



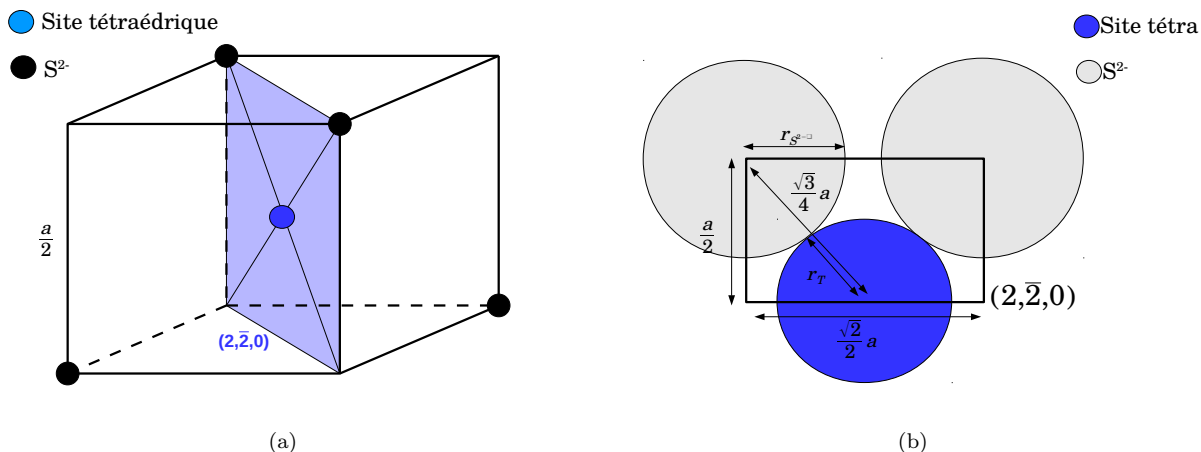


FIGURE 9 – Calcul de la taille d’un site tétraédrique.

A.N. :  $r_T = 71 \text{ pm}$

Habitabilité d’un site octaédrique : fig.10.

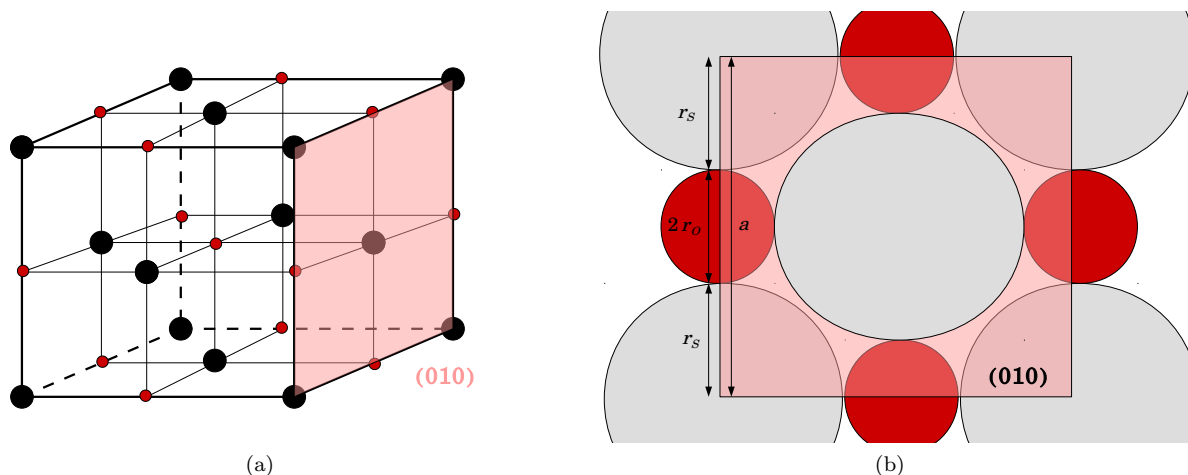


FIGURE 10 – Calcul de la taille d’un site octaédrique.

$$2r_O + 2r_{S^{2-}} = a$$

$$r_O = \frac{a}{2} - r_{S^{2-}}$$

A.N. :  $r_O = 110 \text{ pm}$

3.7 Compte-tenu de la taille des sites octaédriques et tétraédrique, on peut supposer que les ions  $Fe^{3+}$  ( $r_{Fe^{3+}} < r_T$ ) occupent un site tétraédrique sur 2 et que les ions  $Cu^+$  occupent un site octaédrique sur 2 ( $r_T < r_{Cu^+} < r_O$ ) : fig.11.

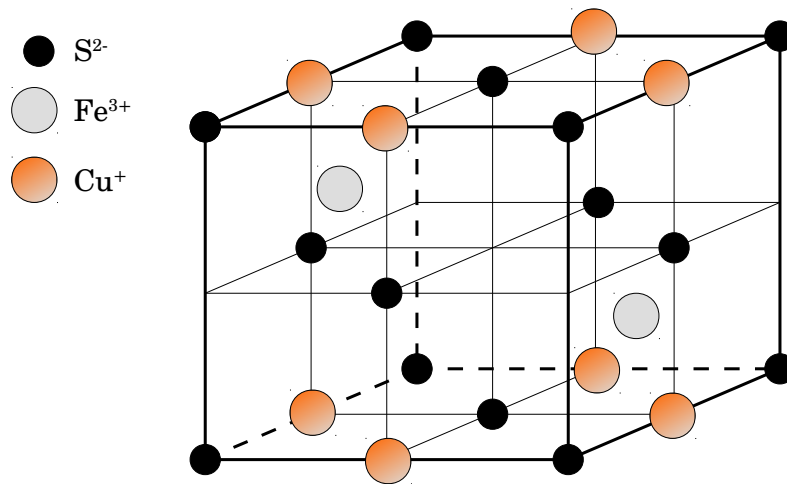


FIGURE 11 – Proposition de maille pour la chalcopyrite