



## DEVOIR SURVEILLÉ 7 – PHYSIQUE-CHIMIE

D.Malka – MPSI 2019-2020 – Lycée Jeanne d'Albret

14.03.2020

Durée de l'épreuve : 3h00

L'usage de la calculatrice est autorisé.

L'énoncé de ce devoir comporte 6 pages

- La numérotation des exercices doit être respectée.
- Les résultats doivent être systématiquement encadrés.
- Les pages doivent être numérotées de la façon suivante :  $n^{\circ}$  page courante / nombre total de pages.
- Il ne faudra pas hésiter à formuler des commentaires. Le barème tiendra compte de ces initiatives ainsi que des qualités de rédaction de la copie.
- Si, au cours de l'épreuve, vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, signalez le sur votre copie et poursuivez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous êtes amené à prendre.

### Problème 1 – Effets quantiques dans les conducteurs

Dans ce problème, on examine quelques manifestations macroscopiques des propriétés quantiques des conducteurs portés à basse température. Dans une première partie, on s'intéresse à la quantification des orbites cyclotron d'une particule chargée à l'origine de l'effet Hall quantique. Dans une deuxième partie, on étudie l'effet Aharonov-Bohm dans un semi-conducteur en forme d'anneau soumis à un champ magnétique. *Aucune connaissance pointue en mécanique quantique n'est nécessaire pour traiter le problème. Les deux parties de ce problème sont indépendantes.*

Données :

- charge élémentaire  $e = 1,6 \times 10^{-19}$  C,
- masse de l'électron  $m = 9,0 \times 10^{-31}$  kg,
- constante de Planck  $h = 2\pi\hbar = 6,63 \times 10^{-34}$  J · s,
- constante de Boltzmann :  $k_B = 1,38 \times 10^{-23}$  J · K<sup>-1</sup>,
- célérité de la lumière dans le vide :  $c \approx 3,0 \times 10^8$  m · s<sup>-1</sup>.

#### 1. Quantification de l'orbite cyclotron des électrons dans un champ magnétique.

Nous nous intéressons à un modèle simplifié du mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique. Nous commençons par décrire classiquement la trajectoire puis quantiquement. Nous étudions alors comment quantifier les trajectoires cyclotron périodiques d'une charge dans un champ magnétique.

##### 1.1 Orbites cyclotron classiques

- 1.1.1 On considère un électron de charge  $-e$ , de masse  $m$  et de vitesse  $\vec{v}$  soumis à un champ magnétique uniforme  $\vec{B}$  dans le référentiel  $\mathcal{R}$  galiléen. Donner l'expression de la force exercée par le champ magnétique sur l'électron.
- 1.1.2 On admet que pour une vitesse initiale  $v_0\vec{u}_x$  ( $v_0 > 0$ ) orthogonal au champ  $\vec{B} = B\vec{u}_z$  (avec  $B > 0$ ) la trajectoire est circulaire de rayon  $R$  et de centre  $C(0, R)$ . Recopier et compléter la figure 1 en indiquant au point  $P$  les coordonnées polaires  $r$  et  $\theta$ , les vecteurs de la base polaire  $\vec{u}_r$  et  $\vec{u}_\theta$ , la vitesse ainsi que la force exercée par le champ magnétique.
- 1.1.3 L'électron est émis au point  $O$ . Justifier que le cercle est décrit dans le demi-plan  $y \geq 0$  et parcouru dans le sens trigonométrique.
- 1.1.4 Justifier que la norme de la vitesse est constante au cours du mouvement.
- 1.1.5 Déterminer alors le rayon  $R$  de la trajectoire et la fréquence du mouvement, dite *fréquence cyclotron*,  $f_c = \frac{\omega_c}{2\pi}$  en fonction des paramètres du problème. Calculer  $f_c$  pour  $B = 1$  T.

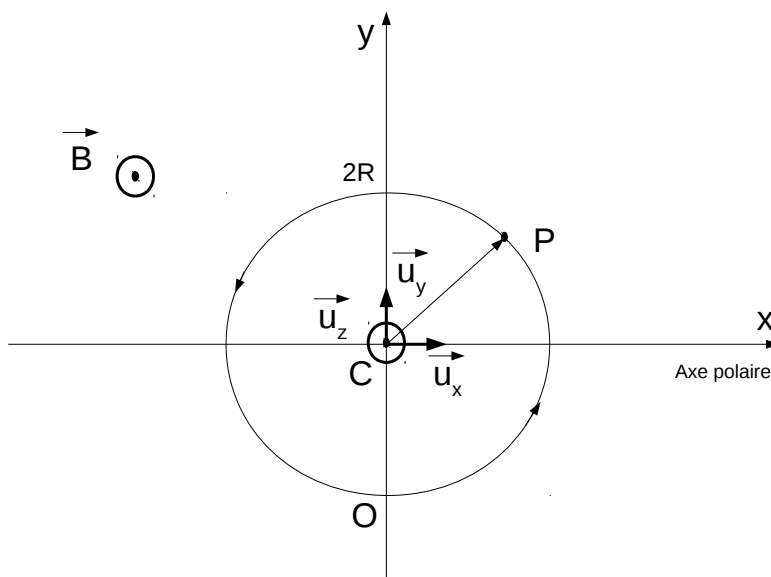


FIGURE 1 – Trajectoire de l’électron dans le champ magnétique  $\vec{B}$

1.2 Quantification du mouvement cyclotron

La physique quantique impose une quantification du mouvement de la particule. Un grand nombre d’effets quantiques peuvent être compris en conservant la notion de trajectoires classiques, pourvu qu’elles soient soumises à une règle de quantification de Bohr-Sommerfeld. La règle de quantification fait intervenir la longueur d’onde de de Broglie  $\lambda_B = p/h$  du système, où  $p$  est sa quantité de mouvement (ou son impulsion). L’impulsion du système {champ magnétique + électron} est définie comme la somme de la quantité de mouvement de l’électron et de la quantité de mouvement  $g_{em}$  associée au champ magnétique. Pour un électron dans un champ uniforme, on peut ainsi écrire :

$$\vec{p} = m\vec{v} - eB \frac{R}{2} \vec{u}_\theta$$

La règle de quantification de Bohr-Sommerfeld relie la circonférence de l’orbite cyclotron à la longueur d’onde de de Broglie par la relation :

$$2\pi R_n = (n + \gamma)\lambda_B \quad \text{avec } n \in \mathbb{N}^* \quad \text{et } 0 \leq \gamma < 1$$

1.2.1 Montrer que le rayon  $R_n$  de l’orbite est donné par :

$$R_n = \sqrt{2(n + \gamma)} l_B$$

où  $l_B$  est une longueur définie à partir de  $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ ,  $e$  et  $B$  dont on donnera l’expression.

1.2.2 Montrer que l’énergie cinétique  $\frac{1}{2}mv^2$  de la particule sur la trajectoire de rayon  $R_n$  vaut alors :

$$\mathcal{E}_n = (n + \gamma)\hbar\omega_c$$

Commenter.

1.2.3 Montrer que l’on peut former une température  $T_0$  à l’aide des constantes  $\omega_c$ ,  $\hbar$  et  $k_B$ . Calculer  $T_0$  pour  $B = 1 \text{ T}$ .

1.2.4 A une température  $T \ll T_0$ , à faible densité, les électrons décrivent alors uniquement des orbites de plus basse énergie ( $n = 0$ ). On envoie un faisceau laser de longueur d’onde  $\lambda = 96 \mu\text{m}$  sur le semi-conducteur contenant les électrons et plongé dans un champ magnétique dont on peut varier l’intensité. On obtient les courbes fig.2.

1.2.4.1 Montrer que pour interpréter le graphe de droite, il faut supposer que, dans le semi-conducteur, tout se passe comme si les électrons étaient doués d’une masse effective  $m^*$  plus faible que leur masse  $m$ . Évaluer  $m^*$ .

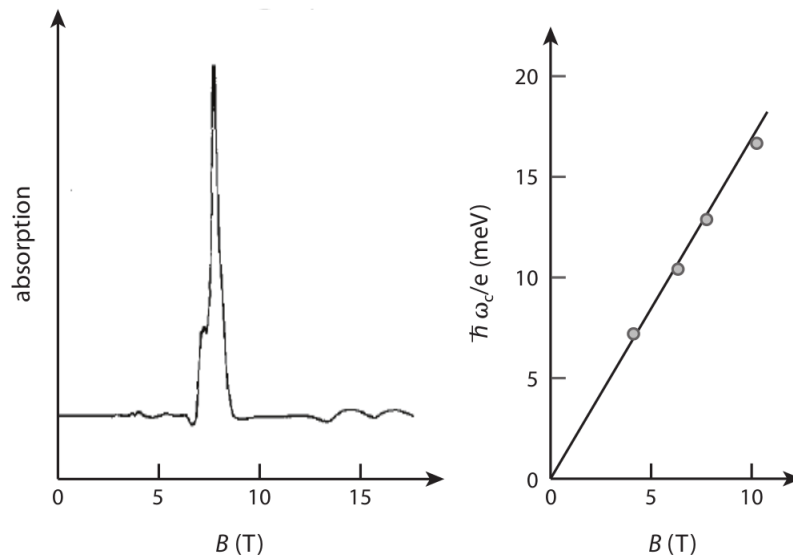


FIGURE 2 – Réponse du semi-conducteur, plongé dans une champ magnétique uniforme et stationnaire, à un faisceau laser de longueur d’onde  $\lambda = 96 \mu\text{m}$ .

1.2.4.2 Interpréter alors le graphe de gauche.

## 2. Effet Aharonov-Bohm

Nous nous intéressons aux interférences d’ondes de matière chargées soumises à un champ magnétique. Pour cela nous considérons dans un premier temps le système d’interférences optiques dit des fentes d’Young. Nous donnons une interprétation géométrique de la figure d’interférences en termes différence de marche entre les deux trajectoires issues de chacune des fentes d’Young et nous l’appliquons à des particules chargées en présence d’un champ magnétique. Enfin, nous opérons par analogie avec les fentes d’Young pour interpréter l’effet Aharonov-Bohm dans un semi-conducteur en forme d’anneau.

On considère donc le système des fentes d’Young. Sous l’effet d’une onde lumineuse incidente, les points  $A_1$  et  $A_2$  émettent en phase deux ondes harmoniques, de longueur d’onde  $\lambda$ , d’expressions respectives  $s_1(M, t) = s_0 \cos(\omega t)$  et  $s_2(M, t) = s_0 \cos(\omega t + \delta\phi)$  au point  $M$  (fig.3).

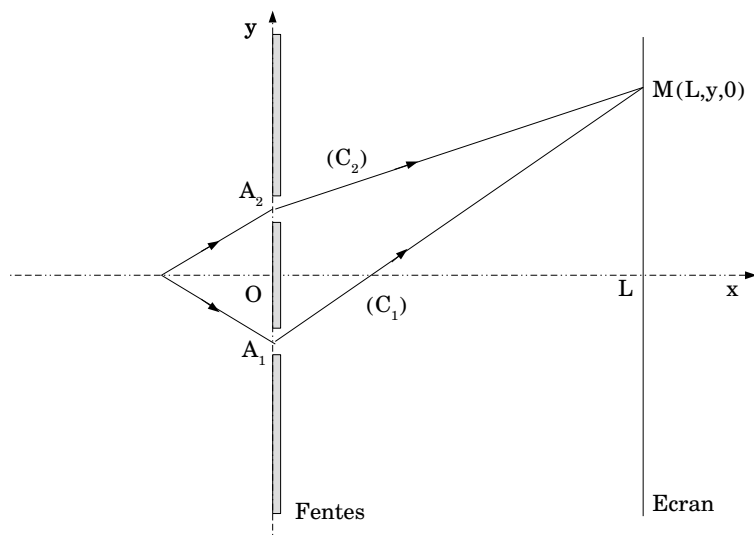


FIGURE 3 – Le dispositif des fentes d’Young. Coordonnées de  $A_1$  :  $(0, d/2, 0)$ , coordonnées de  $A_2$  :  $(0, -d/2, 0)$ . Dans les conditions d’utilisation,  $y \ll L$  et  $d \ll L$ .

2.1 L’écran n’est sensible qu’à l’intensité lumineuse  $I = \alpha \langle s(M, t)^2 \rangle$  où  $\langle s(M, t) \rangle$  est la moyenne temporelle de la vibration lumineuse  $s(M, t)$  en  $M$  et  $\alpha$  une constante positive. Exprimer  $I$  en fonction de  $I_0 = \alpha s_0^2$  et de  $\delta\phi$ .

- 2.2 A l’aide d’un développement limité à l’ordre 2 en  $y/L$  et  $d/L$ , montrer que la différence de marche  $\delta$  en  $M$  entre les deux ondes empruntant les chemins  $(C_2)$  et  $(C_1)$  s’écrit :

$$\delta = \frac{d \cdot y}{L}$$

En déduire l’expression du déphasage  $\delta\phi$  au point  $M$  en fonction de  $d$ ,  $y$ ,  $L$  et  $\lambda$ .

- 2.3 Donner l’expression de l’intensité  $I(y)$ . En quelles ordonnées  $y_p$ , les interférences sont-elles constructives ? Représenter graphiquement  $I(y)$ .
- 2.4 Les ondes considérées précédemment sont en fait la manifestation ondulatoire de particules de charges  $q$ . On ajoute un solénoïde de rayon  $R$  en aval des fentes d’Young (fig.4). Le champ magnétique  $\vec{B}$  engendré par le solénoïde ajoute un déphasage supplémentaire entre les deux ondes interférant en  $M$  :

$$\delta\phi_B = -\frac{q}{\hbar} B \pi R^2$$

Cependant, ce champ magnétique ne modifie pas les trajectoires  $(C_1)$  et  $(C_2)$  des particules.

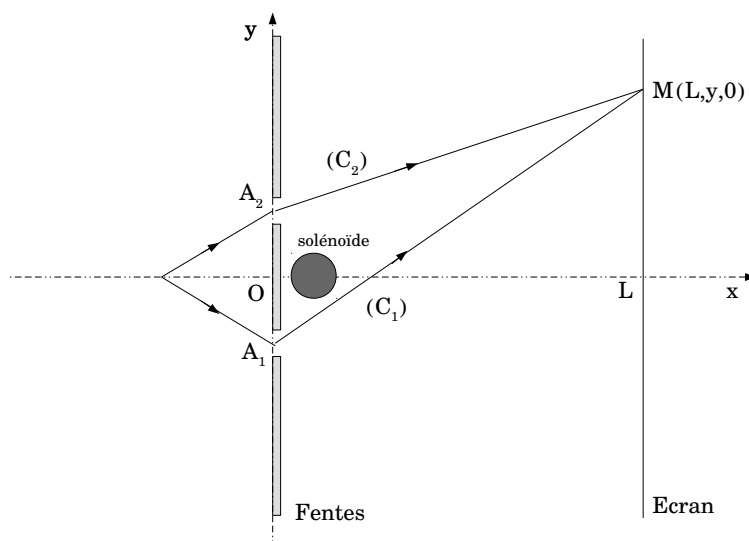


FIGURE 4 – Un solénoïde de rayon  $R$  est ajouté en aval des fentes d’Young

Expliquer précisément comment l’intensité  $I(y)$  sur l’écran est modifiée par la présence du champ magnétique  $B$ .

- 2.5 La figure fig.5 représente un échantillon semi-conducteur en forme d’anneau. Un courant électronique est induit par une tension électrique appliquée  $U$  entre les bornes 1 et 2. L’existence de deux chemins de conduction conduit à un phénomène d’interférences affectant la valeur de la résistance  $Z$  du circuit. Un champ magnétique  $B$  appliqué perpendiculairement au circuit induit une modification de cette résistance.

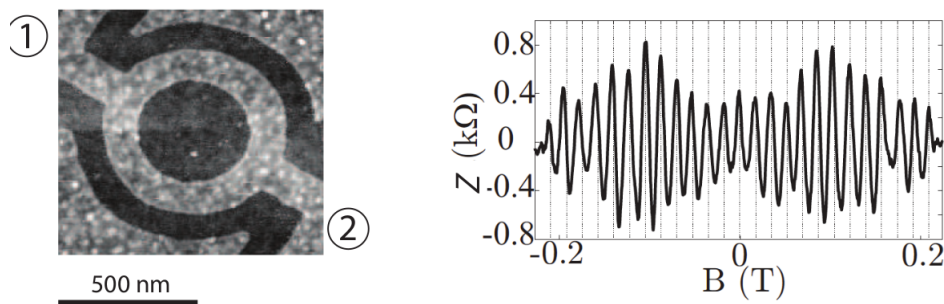


FIGURE 5 – Fluctuation de la résistance  $Z$  d’un semi-conducteur en forme d’anneau de rayon  $R = 270$  nm en fonction du champ magnétique  $B$

Par analogie avec le système précédent expliquer au mieux les fluctuations de la résistance  $Z$  du dispositif avec la valeur du champ magnétique appliqué. Une évaluation numérique de la pseudo-période  $\Delta B$  de ces variations est notamment attendue.

## Problème 2 – Le cuivre et l’un de ses minerais, la chalcoppyrite

Données :

— Numéro atomique du cuivre : 29.

— Masses molaires :

Elément	S	Fe	Cu
$M$ (g · mol <sup>-1</sup> )	32.06	55.84	63.55

— Rayon métallique du cuivre :  $r_{Cu} = 127$  pm

— Rayons ioniques :

Ion	$Fe^{2+}$	$Fe^{3+}$	$Cu^+$	$Cu^{2+}$	$S^{2-}$
$r$ (pm)	78	64	96	70	180

— Nombre d’Avogadro  $\mathcal{N}_A = 6,02 \times 10^{23}$

### 1. L’élément cuivre

1.1 L’isotope le plus abondant du cuivre est  $^{63}Cu$ . Combien de protons et de neutrons cet isotope comprend-il ?

1.2 Donner la configuration électronique de l’atome de cuivre dans son état fondamental sachant que des mesures spectroscopiques montrent que l’orbitale la plus éloignée du noyau ne contient qu’un seul électron.

1.3 Le cuivre  $^{64}Cu$  est radioactif (fig.6) :

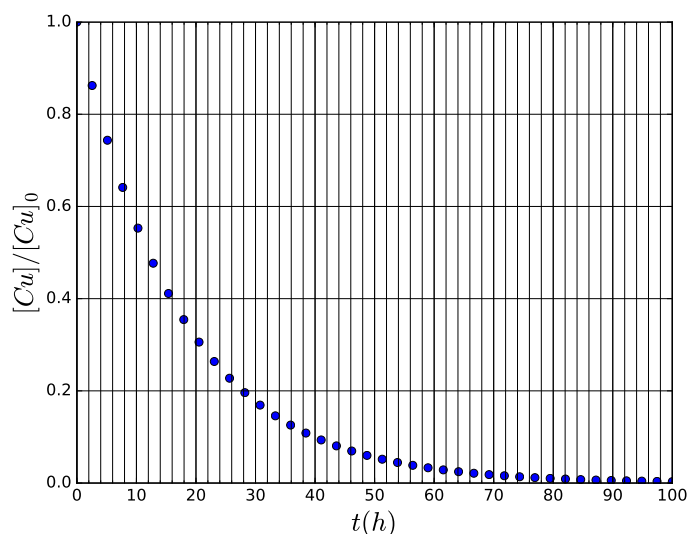
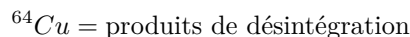


FIGURE 6 – Désintégration radioactive du cuivre  $^{64}Cu$

1.3.1 Déterminer le temps de demi-vie de l’isotope  $^{64}Cu$ .

1.3.2 Sachant que la loi cinétique de la désintégration de  $^{64}Cu$  est d’ordre 1, déterminer sa constante de vitesse  $k$ .

### 2. Structure cristalline du cuivre métallique

Le cuivre métallique cristallise suivant le système cubique à faces centrées de paramètre de maille  $a$ . On supposera que les atomes de cuivre les plus proches sont en contact.

2.1 Représenter la maille.

2.2 Combien une maille contient-elle d’atomes de cuivre ?

2.3 Calculer le paramètre de maille  $a$ .

2.4 Définir et calculer la compacité du cuivre.

2.5 Déterminer la masse volumique du cuivre.

### 3. La chalcopryrite

La chalcopryrite est un minéral mixte de cuivre et de fer de formule chimique :  $CuFeS_2$ . De façon approchée, la chalcopryrite peut être décrite par un réseau cubique à faces centrées d’ions sulfure  $S^{2-}$ , dans lesquels les ions cuivre et les ions fer occupent des sites interstitiels.

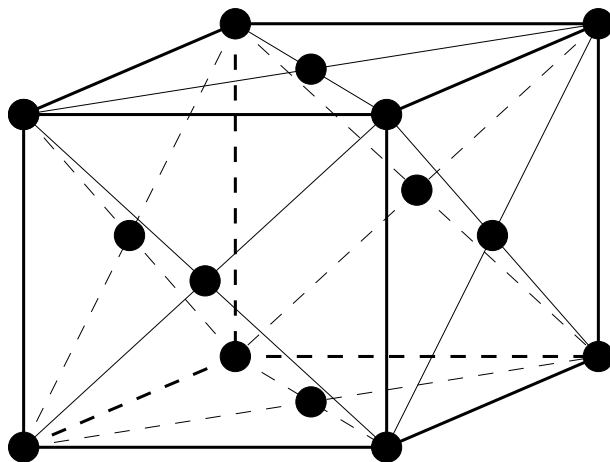


FIGURE 7 – La chalcopryrite. Ne sont représentés que les ions  $S^{2-}$ .

3.1 Le cuivre est présent sous forme d’ion  $Cu^+$ . Déterminer la charge des ions fer.

3.2 Donner la population en ions soufre, en ions fer et en ions cuivre de la maille de chalcopryrite.

3.3 Calculer les fractions massiques en soufre, en cuivre et fer de la chalcopryrite.

3.4 Sachant que le paramètre de maille vaut 580 pm, la structure formée par les anions est-elle compacte ?

3.5 Reproduire la maille et y indiquer la position des sites tétraédriques et des sites octaédriques.

3.6 Quel est le rayon maximal d’un cation s’insérant dans un site tétraédrique du réseau d’ions sulfure ?  
Même question pour les sites octaédriques.

3.7 Proposer alors une maille complète décrivant la chalcopryrite