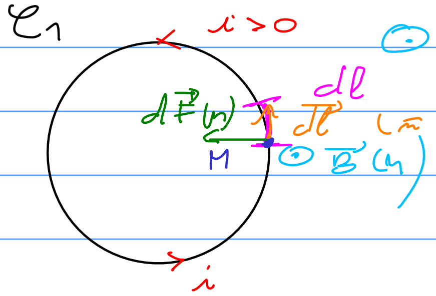
EM 3
Conversion électromécanique de puissance.

Systèmes en translation (ex : haut parleur)

1. Force de Laplace.

Action mécanique d'un champ magnétique sur un conducteur parcouru par courant.

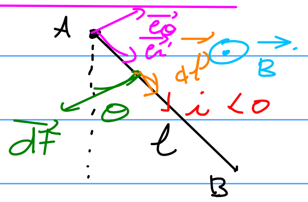
1.1. Résultante



$\vec{dF_L}(M) = i\,\vec{d\ell}(M) \wedge \vec{B}(M)$

$$\boxed{\vec{F_L} = \int_{\mathcal{C}} i\,\vec{d\ell} \wedge \vec{B}}$$

Application. $\vec{F}_{Laplace}$ subit par [AB] ?



$d\vec{F}(M) = i\,\vec{d\ell} \wedge \vec{B}$

avec $\vec{d\ell} = dr\,\vec{e_r}$

$\vec{B} = B\,\vec{e_z}$, $B>0$

$\Rightarrow d\vec{F}(M) = iB\,dr \times (-\vec{e_\theta})$

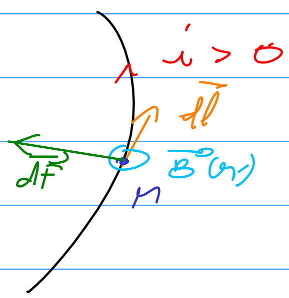
$= -iB\,dr\,\vec{e_\theta}$

$\Rightarrow \vec{F} = \int_{\mathcal{C}} d\vec{F}(M) = -iB\int_0^\ell dr\,\vec{e_\theta} = -iB\ell\,\vec{e_\theta}$

1.2. Moment des forces de Laplace.

$\vec{\mathcal{M}_O} = \int_{\mathcal{C}} d\vec{\mathcal{M}_O}$ avec $d\vec{\mathcal{M}_O} = \vec{OM} \wedge d\vec{F}(M)$

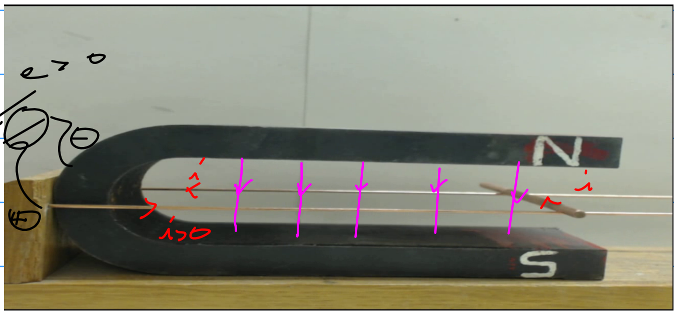
$= \vec{OM} \wedge i\,\vec{d\ell} \wedge \vec{B}$



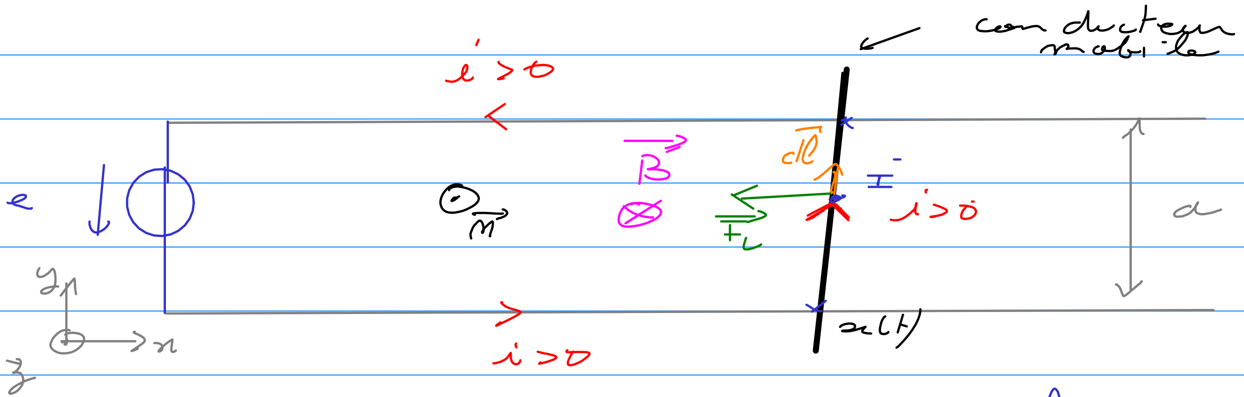
d'où $\vec{\mathcal{M}_O} = \int_{\mathcal{C}} \vec{OM} \wedge i\,\vec{d\ell} \wedge \vec{B}$

2 Les rails de Laplace

2.1. Expérience



Voir vidéo ....



Interprétation de l'expérience : le cylindre se meut sous l'effet des forces de Laplace.

2.2. Equation mécanique

Equat° du mvt vérifiée par $x(t)$

Syst : cylindre mobile de masse m

Ref : labo galiléen.

IDF : - poids $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\,\vec{e_z}$

- réaction des rails : $N = N\vec{e_z}$

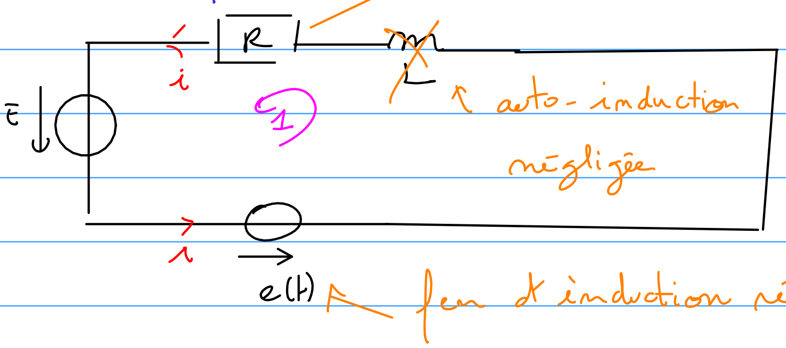
- force de Laplace : $\vec{F_L} = \int_0^a i\,\vec{dl}\wedge\vec{B} = \int_0^a i\,dy\,\vec{e_y}\wedge -B\vec{e_z} = -iBa\,\vec{e_x}$

TRC appliqué au cylindre :

$$m\ddot{x} = -iBa \Leftrightarrow \boxed{\ddot{x} = -\frac{iBa}{m}} \quad (M)$$

2.3. Equation électrique.

Circuit équivalent :



$E + e - Ri = 0$ avec $e(t) = -\dfrac{d\phi_B}{dt}$ avec $\phi_B = \iint \vec{B}.\vec{dS} = -Bax$

$\Rightarrow \quad e(t) = +Ba\dot{x}$

D'où : $\boxed{E = Ri - Ba\dot{x}}$ (E)

2.4. Evolution du système.

2.4.1. Qualitativement

On exploite la loi de Lenz.

Courant i imposé par le générateur
$\Rightarrow$ force de Laplace sur le barreau
$\Rightarrow$ accélération du barreau
$\Rightarrow$ la surface du circuit varie donc le flux Φ_B aussi
$\Rightarrow$ f.e.m d'induction.

D'après la loi de Lenz, la fem d'induction doit s'opposer à la cause qui lui a donné naissance donc atténuer le courant i jusqu'à l'annuler.

$\Rightarrow$ si $i \searrow$ alors $F_L \searrow$ jusqu'à $\vec{F_L} = \vec{0}$

$\Rightarrow$ alors le mvt du cylindre devient rectiligne uniforme. (en l'absence de frottement).

2.4.2 Quantitativement

$$\begin{cases} E = Ri - Ba\dot{x} & (E) \\ \ddot{x} = -\dfrac{iBa}{m} & (M) \end{cases} \Rightarrow i = \frac{E + Ba\dot{x}}{R}$$

D'où (M) devient :

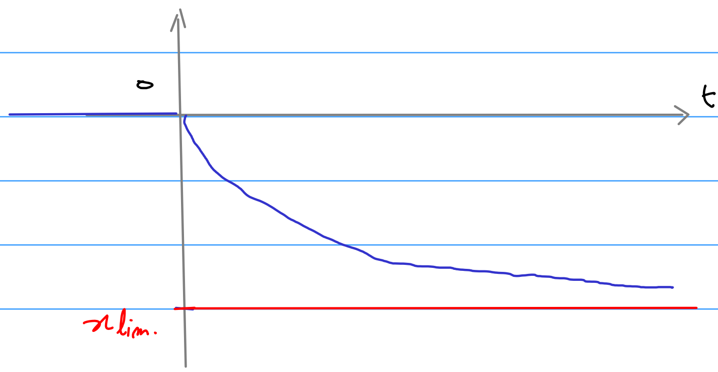
$$\ddot{x} = -\frac{Ba}{m}\left(\frac{E}{R} + \frac{Ba\dot{x}}{R}\right) \Leftrightarrow \boxed{\ddot{x} + \underbrace{\frac{B^2a^2}{mR}}_{\tau^{-1}}\dot{x} = -\frac{BaE}{mR}}$$

$\tau = \dfrac{mR}{B^2a^2}$: durée typique du régime transitoire.

$$\underbrace{\dot{x}(t) = \underbrace{Ae^{-t/\tau}}_{\text{régime libre}} - \underbrace{\frac{E}{Ba}}_{\text{régime établi}}}_{\text{régime transitoire}}$$

On pose $\dot{x}_{lim} = -\dfrac{E}{Ba}$

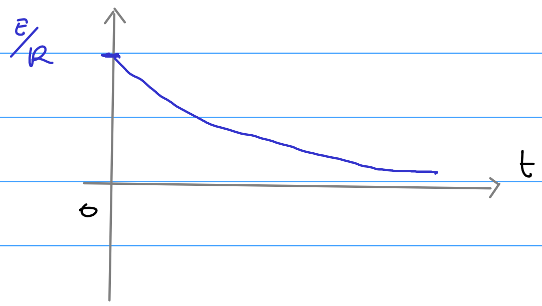
A $t=0$, $\underbrace{\dot{x}(0^+)}_{A+\dot{x}_{lim}} = \underbrace{\dot{x}(0^-)}_{0} \Rightarrow A = -\dot{x}_{lim}$



D'où $\boxed{\dot{x}(t) = \dot{x}_{lim}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)}$

On en déduit $i(t)$:

$$i(t) = \frac{E + Ba\dot{x}}{R} = \frac{E}{R} + \frac{Ba}{R} \times -\frac{E}{Ba}\left(1 - e^{-t/\tau}\right) \Rightarrow \boxed{i(t) = +\frac{E}{R}e^{-t/\tau}}$$



Le courant initial E/R cause de l'induction est annulé (effet) au bout de qq τ.

2.5. Bilan d'énergie

puissance reçue des forces de Laplace P_{FL}

Puissance mécanique $\vec{F}\cdot\vec{v}$: $(M)\times\dot{x}$: $m\ddot{x}\dot{x} = \underbrace{-iBa\dot{x}}$

Puissance électrique $u\times i$: $(E)\times i$: $Ei = Ri^2 \underbrace{- Ba\dot{x}i}$

= puissance reçue par induction électromagnétique. $-P_{ind}$

Constat : $P_{FL} + P_{ind} = 0$

Généralisation : soit un système électromécanique. La puissance mécanique reçue des forces de Laplace est égale à l'opposé la puissance électrique reçue par induction :

$$\boxed{\underbrace{P_{FL}}_{\vec{F_L}\cdot\vec{v}} + \underbrace{P_{ind}}_{-ei} = 0}$$

Terminons le bilan : $(E)\times i - (M)\dot{x}$ donne :

$$Ei - \underbrace{m\ddot{x}\dot{x}}_{\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2\right)} = Ri^2 - \cancel{Ba\dot{x}i} + \cancel{Ba\dot{x}i}$$

$$\Leftrightarrow \frac{dE_c}{dt} = Ei - Ri^2 \Leftrightarrow \boxed{Ei = \frac{dE_c}{dt} + Ri^2}$$

puissance fournie par le générateur. — variation d'énergie du système. — puissance dissipée par effet Joule.