Fiche Technique Expérimentale

Mesures & Incertitudes

D.Malka – MPSI 2018-2019 – Lycée Jeanne d'Albret

1 Importance de la mesure

Mesurer des grandeurs identifiées est une activité fondamentale dans les laboratoires de recherche scientifique et dans l'industrie. Toute validation théorique d'un phénomène (physique, biologique, chimique, etc.) passe par la mesure fiable de ses effets.

Mesurer une grandeur (intensité d'un courant, tension, longueur,. . .), n'est donc pas simplement rechercher la valeur de cette grandeur. *La valeur vraie de cette grandeur est de toutes les manières inaccessible.* Le résultat du mesurage est donc une estimation de cette valeur à laquelle il faut donc associer une incertitude afin de pouvoir qualifier la qualité de la mesure.

2 Vocabulaire

Dans le vocabulaire courant, le mot « mesure » peut aussi bien désigner un procédé, une valeur, une comparaison. . .c'est pourquoi, en métrologie, a été défini un vocabulaire plus précis qui est présenté ici et qu'il convient d'adopter.

Mesurande : grandeur que l'on veut mesurer.
➦ exemple : *une tension, une longueur, une masse. . .*

Mesurage : ensemble des opérations permettant de déterminer expérimentalement une ou plusieurs valeurs que l'on peut raisonnablement attribuer à une grandeur.
➦ exemple : *pour mesurer la résistance R d'un conducteur ohmique, on utilise un ohmmètre réglé sur un certain calibre.*

Valeur vraie M_{vrai} : la valeur du mesurande que l'on obtiendrait si le mesurage était parfait. Un mesurage n'étant jamais parfait, cette valeur est toujours inconnue.

Mesure m : valeur attribuée (simple nombre) à une grandeur après mesurage.
➦ exemple : *en effectuant une pesée à l'aide d'une balance, elle peut afficher $205,2\,g$ qui est la mesure de la masse de l'échantillon pesé.*

Erreur de mesure E_R : différence entre la mesure m d'une grandeur et la valeur vraie du mesurande :

$$E_R = m - M_{vrai}$$

Comme M_{vrai} est inaccessible, l'erreur ne peut être qu'estimée.

Incertitude de mesure δM : estimation de l'erreur de mesure E_R par rapport à la valeur vraie M_{vrai} du mesurande.

Résultat du mesurage : intervalle de valeurs dans lequel la valeur vraie du mesurande se situe avec une certaine probabilité. On présente souvent le résultat d'un mesurage de la façon suivante : $m \pm \delta M$ en précisant un intervalle de confiance.
➦ exemple : *le résultat du mesurage de la longueur d'onde de la raie verte du mercure par des étudiants est : $\lambda = 548\,nm \pm 4\,nm$ avec un intervalle de confiance de 95%. Cela signifie qu'il y a 95% de chance que la valeur vraie de λ soit comprise entre $544\,nm$ et $552\,nm$.*

3 Erreurs de mesure

Si on réalise N mesurages de la même grandeur dans les mêmes conditions, on trouve des valeurs m_k différentes. *Toute mesure est entachée d'une erreur.*

3.1 Grandeur d'influence sur un mesurage

C'est une grandeur qui n'est pas le mesurande mais qui a un effet sur le résultat du mesurage.
➡ exemple : *la résistance d'un conducteur ohmique dépend de la température.*

3.2 Sources d'erreur lors d'un mesurage

Lors des mesurage, les sources d'erreurs sont nombreuses :
— biais dans le protocole,
— précision finie des instruments de mesure,
— paramètres d'influence fluctuants,
— ...
L'important est de les repérer, les éliminer si possible, sinon en tenir compte sous la forme d'une incertitude sur la mesure.

3.3 Erreurs de mesure

3.3.1 Types d'erreur

L'erreur de mesure E_R peut avoir deux origines :
— systématique E_{R_s},
— aléatoire E_{R_a}.

On a donc : $E_R = E_{R_s} + E_{R_a}$

3.3.2 Erreur systématique

L'erreur systématique est identique pour toutes les observations m_k. Elle se traduit par décalage global par rapport à la valeur vraie.

C'est le mesurage qui est en cause. Elle est facile à corriger pour peu qu'elle soit détectée [1]. Par défaut, on considérera que l'erreur systématique est nulle.
➡ exemple : *lors d'un titrage, l'expérimentateur a mal réglé le zéro de la burette. Le ménisque surmonte initialement la graduation* $0,1\,mL$. *Tous les volumes mesurés sont alors entachés d'une erreur systématique de* $0,1\,mL$.

➡ exemple : *l'insertion d'un voltmètre dans un circuit électrique le perturbe. La mesure d'une tension aux bornes d'un dipôle dans un circuit électrique sans tenir compte de la présence du voltmètre est entachée d'une erreur systématique.*

3.3.3 Erreur aléatoire

L'erreur aléatoire est, en général, différente d'une mesure m_k à l'autre. Elle résulte de fluctuations incontrôlables des paramètres d'influence sur la mesure.

Supposons que l'on effectue N mesures m_k dans les conditions de répétabilité. L'erreur aléatoire E_{R_a} sur une mesure m_k du mesurande est définie rigoureusement par :

$$E_{R_a} = m_k - M_{vraie}$$

Problème...on ne connaît pas M_{vraie} ! De la même manière que M_{vraie}, l'erreur aléatoire sur E_{R_a} sur une mesure ne peut-être qu'estimée.

3.4 Fidélité et justesse d'un mesurage

Fidélité d'un mesurage : aptitude à donner des indications très voisines lors de l'application répétée du même mesurage dans les mêmes conditions. Elle est quantifiée par la dispersion des erreurs aléatoires.

Justesse d'un mesurage : aptitude à donner des indications exemptes d'erreur systématique. Elle est quantifiée par l'erreur systématique.

On peut résumer ce propos par une analogie avec une cible (fig.1) ...à une grande différence près : lors d'un mesurage on ne connaît pas le centre de la cible !

1. En septembre 2012, l'expérience Opéra mesurait, pour des neutrinos, des vitesses supérieures à la célérité de la lumière dans le vide ce qui contredisait la théorie de la relativité. Après six mois d'enquête, il s'est avéré que c'était un défaut dans la connexion d'une fibre optique qui biaisait les mesures. Les neutrinos ne voyagent pas à des vitesses supra-luminiques !

(a) Les mesures sont très dispersées mais centrées autour de la valeur vraie : l'erreur aléatoire est grande, l'erreur systématique est faible.

(b) Les mesures sont peu dispersées mais centrées autour d'une valeur éloignée de la valeur vraie : l'erreur aléatoire est faible, l'erreur systématique est grande.

(c) Les mesures sont peu dispersées et centrées autour de la valeur vraie : l'erreur aléatoire et l'erreur systématique sont faibles. On dira de la mesure qu'elle est précise.

(d) Les mesures sont très dispersées et centrées autour d'une valeur éloignée de la valeur vraie : l'erreur aléatoire est grande, l'erreur systématique aussi.

FIGURE 1 – Fidélité et justesse d'un mesurage.

4 Comment évaluer l'incertitude sur une mesure ?

4.1 Types d'évaluation

Il existe deux types d'évaluation de l'incertitude sur une mesure :
— l'évaluation de type A qui est de nature statistique et qui estime exclusivement l'erreur aléatoire.
— l'évaluation de type B qui est de nature probabiliste. Elle est réalisée lorsqu'une évaluation de type A n'est pas possible [2].

Lorsque les sources de variabilité de la mesure sont multiples, on estime l'incertitude-type pour chacune d'entre elles et l'on fait un bilan global pour construire une incertitude-type composée, qui peut mélanger des évaluations de type A et de type B.

4.2 Evaluation de type A : valeur moyenne et écart-type

L'évaluation de type A de l'incertitude-type est réalisée par l'analyse statistique de séries d'observations : moyenne et écart-type.

On réalise N observations indépendantes m_k dans les conditions de répétabilité. On montre que la meilleure estimation du résultat de la mesure est donnée par la moyenne arithmétique :

$$\overline{m} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} m_k$$

L'écart-type expérimental relatif à la série est donné par :

$$s_{exp} = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{k=1}^{N}(m_k - \overline{m})^2}$$

On définie alors *l'incertitude-type* par l'écart-type s sur la valeur moyenne $\overline{m}$. Le meilleur estimateur de cet écart-type est :

$$s = \frac{s_{exp}}{\sqrt{N}}$$

➡ exemple : *on mesure 2000 fois la résistance r d'un dipôle dans des conditions de répétabilité. On obtient la distribution fig.2* [3].

Pourquoi une telle variabilité de résultats ? Les conditions de mesure (température, bruit des appareils de mesure, signaux parasite…) ne sont pas totalement contrôlables.

La valeur mesurée est la moyenne de la série de mesures :

$$\overline{r} = 59,199678739\,\Omega$$

L'incertitude est l'écart-type de la série de mesures divisé par $\sqrt{2000}$:

2. Ce sera la grande majorité des cas en MPSI, les TP ne durant que 2h !
3. Cette distribution semble obéir à la loi normale.

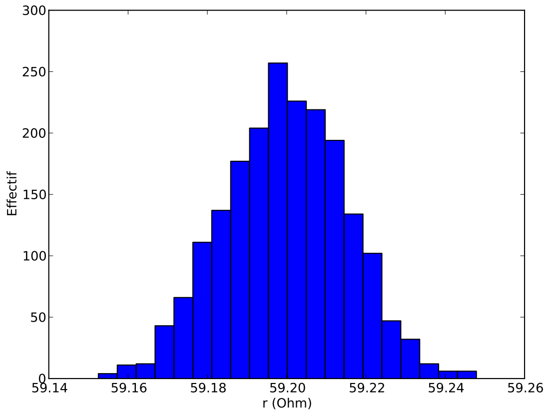


FIGURE 2 – Distribution des 2000 mesures de la résistance r

$$s_{exp} = 0,0154129169742\,\Omega$$

$$s = \frac{s_{exp}}{\sqrt{2000}} = 0,000344643009\,\Omega$$

☞ *On peut entrer la série de données dans le logiciel* Regressi *et lui faire calculer automatiquement la valeur moyenne et l'écart-type sur la valeur moyenne.*

4.3 Evaluation de type B

L'évaluation de type B est effectuée par des moyens autres que l'analyse statistique de série d'observations. L'incertitude-type est obtenue en supposant que l'erreur sur la mesure suit une certaine loi de probabilité. Les plus utilisées sont la loi normale [4] et la loi rectangulaire. L'incertitude-type est alors assimilée à la variance de la loi de probabilité.

En pratique :

— les constructeurs des appareils de mesures fournissent une indication du type Δ_c sans plus d'informations. On supposera alors une loi rectangulaire de largeur $2\Delta_c$. L'incertitude-type retenue est alors :

$$s = \frac{\Delta_c}{\sqrt{3}}$$

— pour les instruments de mesure analogique (règle, rapporteur, vernier, cadran...), on suppose une loi rectangulaire de largeur une graduation. L'incertitude-type retenue est alors :

$$s = \frac{1\,\text{graduation}}{\sqrt{12}}$$

Quelques exemples :

➨ exemple : *On mesure la longueur à vide d'un ressort à la règle graduée en cm. L'incertitude type est :*

$$s = \frac{1}{\sqrt{12}} = 0,289\,cm \approx 0,3\,cm$$

➨ exemple : *On mesure la tension $5,93\,V$ aux bornes d'un dipôle avec un voltmètre. La notice du voltmètre indique :* `précision:0,3%L ± 1UR` *où L est la valeur affichée par l'appareil et $1UR$ est une unité du dernier digit affiché. On évalue alors l'indication constructeur Δ_c :*

$$\Delta_c = 0,3\% \times 5,93 + 0,01 = 0,02779\,V$$

L'incertitude-type vaut donc :

$$s = \frac{\Delta_c}{\sqrt{3}} = 0,016044563\ldots\,V \approx 0,016\,V$$

4. Appelée aussi loi gaussienne.

➡ exemple : *On cherche à déterminer la position de l'image d'un objet par une lentille convergente. A l'œil nu, l'image apparaît nette sur tout un intervalle de position* $[x_{min}, x_{max}]$ *avec* $x_min = 23,0\,cm$ *et* $x_max = 27,5\,cm$. *On suppose alors que la position vraie appartient de façon équiprobable à cet intervalle c'est-à-dire qu'on postule que la variable* x_{mes} *suit une loi rectangulaire. La position mesurée vaut :*

$$x = \frac{x_{max} + x_{min}}{2} = 25,25\,cm$$

L'incertitude-type sur cette mesure est :

$$s = \frac{x_{max} - x_{min}}{\sqrt{3}} = 2,59807\ldots\ cm \approx 2,6\,cm$$

4.4 Composition des incertitudes

Souvent, on mesure la valeur d'une grandeur physique indirectement. Par exemple, lors d'une dilution, on peut évaluer la concentration de la solution fille en connaissant V_{mere}, C_{mere} et V_{fille} via la formule :

$$C_{fille} = \frac{C_{mere}.V_{mere}}{V_{fille}}$$

Evidemment, V_{mere}, C_{mere} et V_{fille} sont entachés des incertitudes δV_{mere}, δC_{mere} et δV_{fille}. Par conséquent, C_{fille} est estimée avec une incertitude δC_{fille}. Comment évaluer δC_{fille} ? On montre que, en supposant les erreurs petites devant les valeurs mesurée, la meilleure estimation de l'erreur sur C_{fille} est :

$$\delta C_{fille} = C_{fille}\sqrt{\left(\frac{\delta C_{mere}}{C_{mere}}\right)^2 + \left(\frac{\delta V_{mere}}{V_{mere}}\right)^2 + \left(\frac{\delta V_{fille}}{V_{fille}}\right)^2}$$

Cas à connaître :
— la somme : si $c = a + b$ alors $\delta c = \sqrt{\delta a^2 + \delta b^2}$;
— la différence : si $c = a - b$ alors $\delta c = \sqrt{\delta a^2 + \delta b^2}$;
— le produit : si $c = a.b$ alors $\delta c = c\sqrt{\left(\frac{\delta a}{a}\right)^2 + \left(\frac{\delta b}{b}\right)^2}$;
— le quotient : si $c = \frac{a}{b}$ alors $\delta c = c\sqrt{\left(\frac{\delta a}{a}\right)^2 + \left(\frac{\delta b}{b}\right)^2}$.

Pour le cas plus complexes, on se fiera à la formule fournie ou au calcul automatique réalisé par un logiciel fiable tel que `Regressi`.

5 Présentation du résultat d'un mesurage

Le résultat d'un mesurage est toujours donné par la mesure m munie d'une incertitude δM :

$$M = m \pm \delta M$$

qu'il faut traduire par $M \in [m - \delta M, m + \delta M]$ avec un certain niveau de confiance c'est-à-dire avec une certaine probabilité [5]

En général et approximativement, on écrira :

$$M = m \pm 2\delta M$$

C'est le résultat du mesurage avec une *incertitude élargie* correspondant à un niveau de confiance de 95%.

Les résultats des mesurages, avec un niveau de confiance de 95%, des exemples précédents sont les suivants :
— $r = 59,200 \pm 0,0012\,\Omega$,
— $U = 5,93 \pm 0.06\,V$,
— $x = 25 \pm 5\,cm$.

On remarque que :
— on ne garde qu'un seul chiffre significatif sur l'incertitude,
— on ne conserve que les chiffres correspondant à une puissance de 10 au moins aussi grande que celle de l'incertitude.

5. Le niveau de confiance dépend du choix de δM et de la loi de probabilité supposée suivi par les mesures m_k (rectangulaire, gaussienne...).

6 Validation expérimentale d'une loi physique – Cas de la régression linéaire

La mesure d'une grandeur physique accompagne souvent la validation expérimentale d'une loi physique. On explique ici, sur le cas simple de la loi d'Ohm, comment valider (ou invalider) expérimentalement cette loi sur un intervalle donné et simultanément mesurer la résistance R de l'échantillon utilisé.

6.1 Mesure

En convention récepteur, la loi d'Ohm s'écrit :

$$u = R.i$$

où u est la tension aux bornes du conducteur ohmique, i l'intensité électrique du courant le traversant et R sa résistance.

On souhaite tester la loi d'Ohm sur l'intervalle de tension $[0\,V, 10\,V]$. Pour cela, on réalise N points de mesure (u, i) accompagnées de leurs incertitudes $(\delta u, \delta i)$. Ici nous prendrons $N = 11$. On obtient le graphe fig.3.

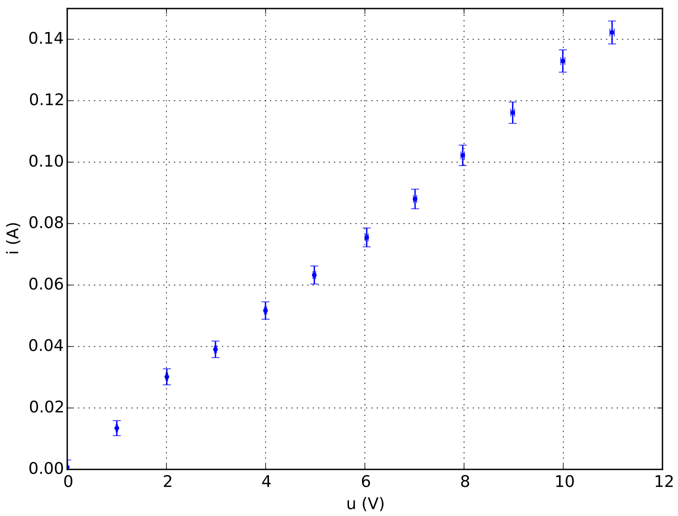


FIGURE 3 – Points de mesure (u, i). Les incertitudes apparaissent graphiquement comme des *barres d'erreur* à 2δ autour des points de mesure.

Le choix des coordonnées n'a pas été laissé au hasard. En l'absence d'information précise sur la méthode d'ajustement des paramètres du modèle linéaire ou affine, il faut placer en ordonnée la grandeur sur laquelle l'incertitude est la plus grande : ici il s'agit de i.

6.2 Régression linéaire

Graphiquement, la tension u et l'intensité électrique i semble reliées par une loi linéaire $i = a.u$. Pour tester cette hypothèse et mesurer a (donc $1/R$), on opère une régression linéaire c'est-à-dire qu'on calcule le coefficient directeur de a tel que la droite d'équation $i = a.u$ passe « au mieux »[6] par les points expérimentaux. Cette opération est réalisée via un algorithme numérique implémenté dans un langage particulier (ici `Python`) ou incorporé à une logiciel de traitement de données comme `Regressi`.

L'algorithme renvoie les valeurs suivantes :
— $a = 0.01279645\,S$
— $\delta a = 9.672383909857396e - 05\,S$

6. Pour plus de détails voir *méthode des moindres carrées* et *méthode du* χ^2.

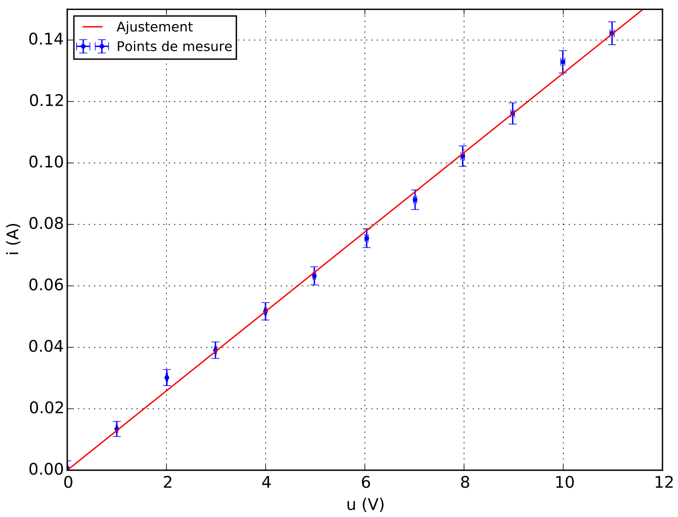


FIGURE 4 – Points de mesure (u, i).

6.2.1 Validation de la loi d'Ohm

La droite d'équation $i = a.u$ avec $a = 0.01279645$ passe, barres d'erreur comprises, par les points expérimentaux [7] (fig.4). La loi linéaire rend donc correctement compte de l'expérience. La valeur de a calculée a alors un sens.

6.2.2 Mesure de la résistance

Sous réserve d'un paramétrage correct, on fera confiance à l'algorithme et on retiendra, avec un intervalle de confiance de 95%, que $R = \dfrac{1}{a} \pm \dfrac{\sigma_a}{a^2}$ soit :

$$R = 78,3 \pm 0,9\Omega$$

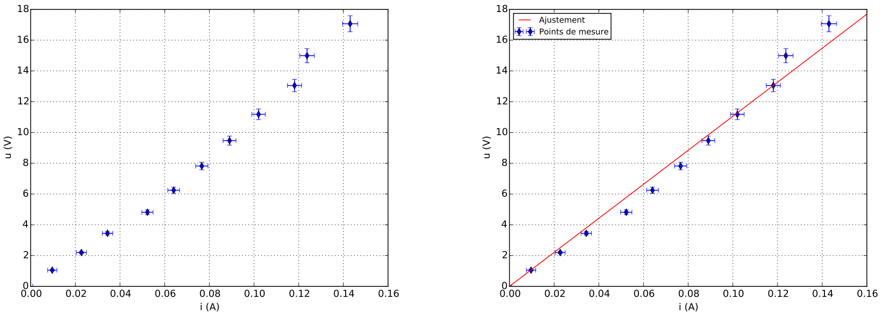
6.3 Attention au sens du coefficient de corrélation

Lors d'un régression linéaire, les logiciels renvoient souvent le coefficient de corrélation r. S'il est voisin de 1 alors les points expérimentaux sont proches de loi droite. ⚠ **Une valeur voisine de 1 ne valide absolument pas le modèle !**

Dans l'exemple précédent, le modèle est valide et $r = 0.99887$.

Dans l'exemple de la figure 5, un simple coup d'œil infirme le modèle linéaire (l'allure est plutôt parabolique). Pourtant $r = 0.99659$!

7. Plus précisément, on peut se fonder sur le test du χ^2. Il s'agit d'un test de nature statistique qui permet de tester l'adéquation d'une série de mesure avec une loi. Si $\chi^2 \sim 1$ alors la loi est validée. Si le χ^2 n'est pas voisin de 1 alors soit la loi n'est pas correcte, soit les incertitudes ont été mal évaluées.



(a) Points de mesure

(b) L'ajustement ne convient pas. On décèle clairement une allure polynomiale d'ordre 2 ou plus.

FIGURE 5 – Exemple montrant que $r \approx 1$ ne valide pas un ajustement.

A savoir faire

- Repérer les sources d'erreurs.
- Comparer l'importance de des erreurs due aux différentes sources : ne prendre en compte que les plus grandes.
- Evaluer systématiquement une incertitude sur toute grandeur mesurée (évaluation de type A ou de type B).
- Calculer l'incertitude sur un produit, un quotient, une somme et une différence.
- Opérer une régression linéaire à l'aide d'un logiciel adapté.
- Discuter la validité d'un modèle linéaire ou affine et exploiter les valeurs des paramètres renvoyés par le logiciel le cas échéant.