



RELATIONS TRIGONOMETRIQUES

D.Malka – MPSI 2018-2019 – Lycée Jeanne d'Albret

Les relations suivantes sont à connaître sur le bout des doigts dans les deux sens.

Fonctions trigonométriques

$$\cos x = \frac{AC}{AB} \quad \sin x = \frac{BC}{AB} \quad \tan x = \frac{BC}{AC}$$

Formules fondamentales

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

Développement des fonctions trigonométriques

$$\begin{aligned} \cos(a + b) &= \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ \cos(a - b) &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \\ \sin(a + b) &= \sin a \cos b + \sin b \cos a \\ \sin(a - b) &= \sin a \cos b - \sin b \cos a \end{aligned}$$

Somme et différence des fonctions trigonométriques

$$\begin{aligned} \cos p + \cos q &= 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \\ \cos p - \cos q &= -2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \\ \sin p + \sin q &= 2 \cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \\ \sin p - \sin q &= 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \end{aligned}$$

Angle double - Angle moitié

$$\begin{aligned} \sin 2x &= 2 \sin x \cos x \\ \cos 2x &= 2 \cos^2 x - 1 \\ \cos 2x &= 1 - 2 \sin^2 x \end{aligned}$$

Linéarisation d'un polynôme en cosinus et sinus


Linéariser un polynôme en cosinus et sinus signifie obtenir un développement en cosinus et sinus avec un exposant maximal égal à 1. Voir l'exemple.

Carré

 Carré

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

 Cas général : formules d'Euler

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$


➔ exemple : linéarisation de $\sin^3 x$

$$\sin x = \frac{\exp(ix) - \exp(-ix)}{2i}$$

$$\Rightarrow \sin^3 x = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^3$$

$$\Leftrightarrow \sin^3 x = -\frac{1}{8i} (e^{3ix} - e^{-3ix} - 3e^{ix} + 3e^{-ix})$$

$$\Leftrightarrow \sin^3 x = \frac{1}{4} (3 \sin x - \sin 3x)$$

 Variations usuelles d'angle

$$\cos(-x) = \cos x \quad \sin(-x) = -\sin x$$

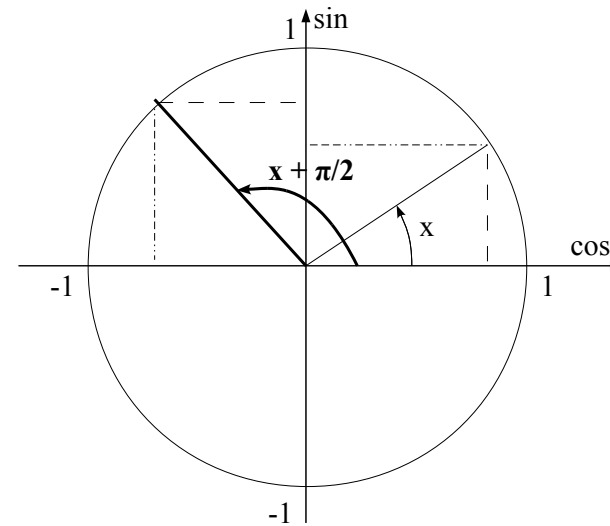
$$\cos(\pi + x) = -\cos x \quad \sin(\pi + x) = -\sin x$$

$$\cos(\pi - x) = -\cos x \quad \sin(\pi - x) = \sin x$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$$

Pour retrouver géométriquement ces relations : le *cercle trigonométrique*.



➔ exemple : il est clair que $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$ et que $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$.