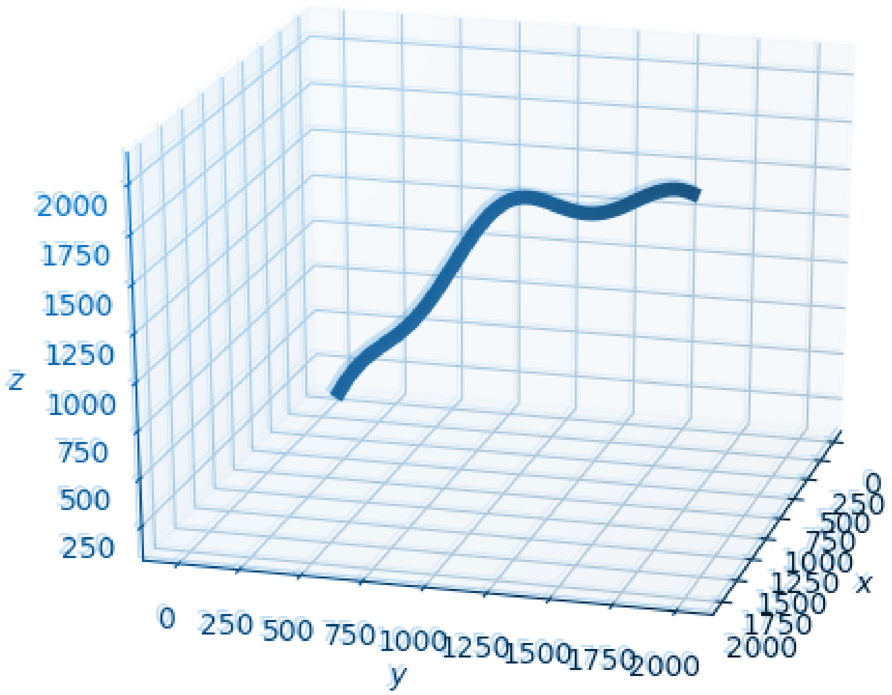
Cours M1

Cinématique



David Malka

MPSI – 2018-2019 – Lycée Jeanne d'Albret

Table des matières

Table des figures

Capacités exigibles

1. **Réaliser et exploiter quantitativement un enregistrement vidéo d'un mouvement : évolution temporelle des vecteurs vitesse et accélération.**
2. Établir les expressions des composantes du vecteur-position, du vecteur-vitesse et du vecteur-accélération dans le seul cas des coordonnées cartésiennes et cylindriques.
3. Exprimer à partir d'un schéma le déplacement élémentaire dans les différents systèmes de coordonnées, construire le trièdre local associé et en déduire les composantes du vecteur-vitesse en coordonnées cartésiennes et cylindriques.
4. Choisir un système de coordonnées adapté au problème posé.
5. Mouvement de vecteur-accélération constant : exprimer la vitesse et la position en fonction du temps ; obtenir la trajectoire en coordonnées cartésiennes.
6. Mouvement circulaire uniforme et non uniforme : exprimer les composantes du vecteur-position, du vecteur-vitesse et du vecteur-accélération en coordonnées polaires planes ; identifier les liens entre les composantes du vecteur-accélération, la courbure de la trajectoire, la norme du vecteur-vitesse et sa variation temporelle ; situer qualitativement la direction du vecteur-accélération dans la concavité d'une trajectoire plane.
7. Différencier un solide d'un système déformable.
8. Reconnaître et décrire une translation rectiligne, une translation circulaire.
9. Décrire la trajectoire d'un point quelconque du solide et exprimer sa vitesse en fonction de sa distance à l'axe et de la vitesse angulaire.

Dans tous le cours, le système de coordonnées cartésien sera attaché au référentiel $\mathcal{R}$ de l'étude.

1 Position d'un point : systèmes de coordonnées usuels

1.1 Base et coordonnées cartésiennes

1.1.1 Coordonnées et vecteurs de base

Voir Fig.1.

Coordonnées : (x, y, z)
Base : $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$

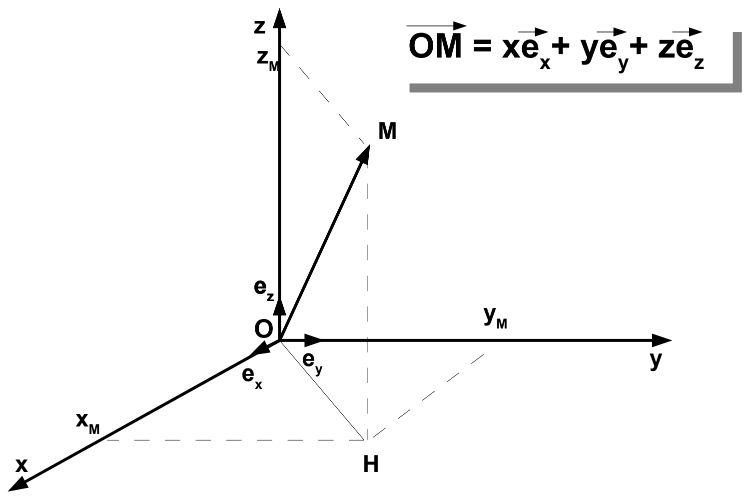


Figure 1 – Base et coordonnées cartésiennes

1.1.2 Vecteur-position

Vecteur-position en coordonnées cartésiennes

$$\overrightarrow{OM}(t) = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$$

1.2 Base et coordonnées cylindriques (ou polaires à 2D)

1.2.1 Coordonnées et vecteurs de base

Voir Fig.2 et 3.

Coordonnées : (ρ, θ, z)
Base : $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$

Application 1
Exprimer les coordonnées cartésiennes en fonction des coordonnées cylindriques d'un point M de l'espace.

Réponse : $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$, $z = z$.

Exprimer les coordonnées cylindriques en fonction des coordonnées cartésiennes d'un point M de l'espace.

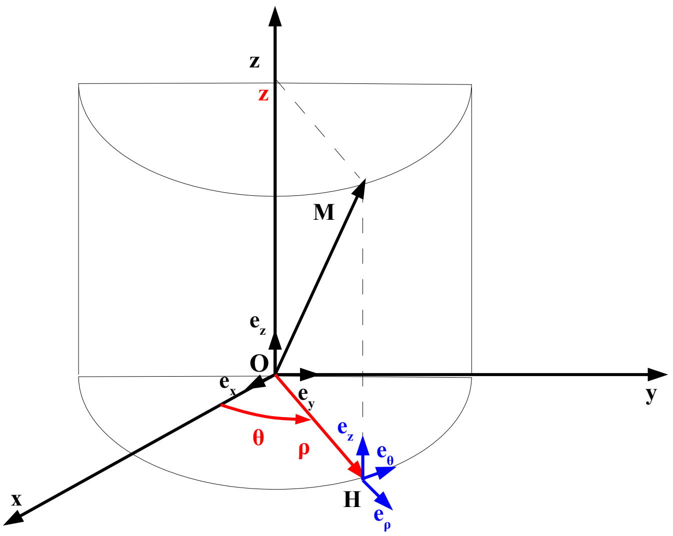


FIGURE 2 – Base et coordonnées cylindriques (ou polaires à 2D)

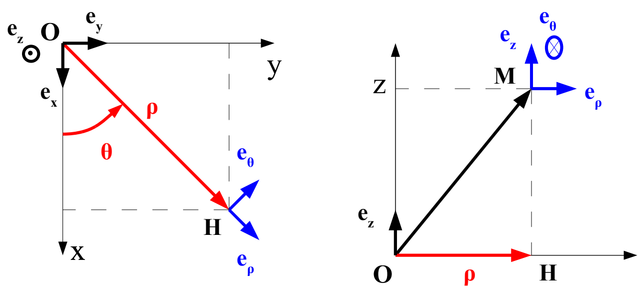


FIGURE 3 – Base cylindrique : plans de coupe

Réponse : $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$, $\cos\theta = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ et $\sin\theta = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $z = z$.

Réponse

1.2.2 Vecteur-position

Vecteur-position en coordonnées cylindriques

$$\overrightarrow{OM}(t) = \rho\vec{e}_\rho + z\vec{e}_z$$

1.3 Base et coordonnées sphériques

1.3.1 Coordonnées et vecteurs de base

Voir Fig.1.

Coordonnées : (r, θ, ϕ)
Base : $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$

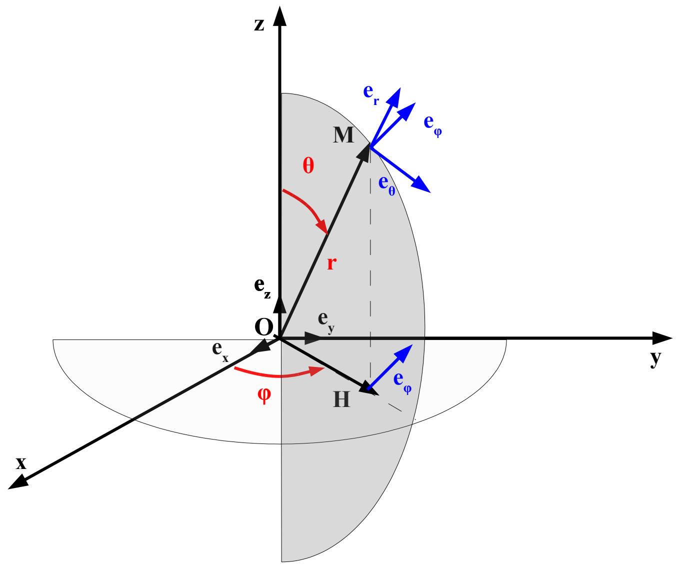


FIGURE 4 – Base et coordonnées sphériques

1.3.2 Vecteur-position

Position en coordonnées sphériques

$$\overrightarrow{OM}(t) = r\vec{e}_r$$

1.4 Comment choisir la base et le système de coordonnées adaptés ?

On choisit par défaut un système de coordonnées cartésien aux axes judicieusement choisis. On préfère les systèmes de coordonnées cylindriques ou sphériques si le problème présente les mêmes symétries que ces systèmes de coordonnées.

2 Trajectoire, vitesse et accélération d'un point

2.1 Trajectoire d'un point dans un référentiel donné

La trajectoire d'un point M est la courbe définie par l'ensemble des positions spatiales occupées à chaque instant par le point M dans un référentiel donné.

2.2 Déplacement élémentaire d'un point dans un référentiel donné

2.2.1 Définition

Déplacement élémentaire – Définition

Soit M et M' deux positions occupées successivement par un point M dans un référentiel donné $\mathcal{R}$. On définit le vecteur déplacement élémentaire $d\overrightarrow{OM}$ ou $(d\vec{l})$ par :

$$d\overrightarrow{OM} = \lim_{M \to M'} \overrightarrow{MM'}$$

2.2.2 Expressions dans les différentes bases

Déplacement élémentaire en coordonnées cartésiennes
Voir fig.5).

$$d\overrightarrow{OM} = dx\vec{e}_x + dy\vec{e}_y + dz\vec{e}_z$$

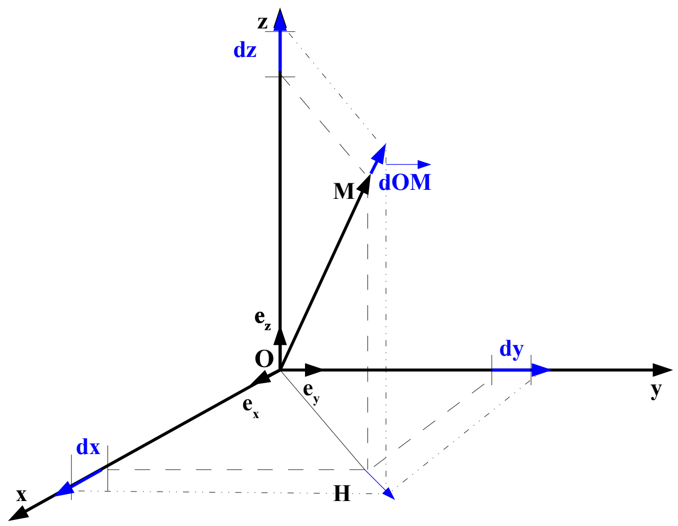


Figure 5 – Déplacement élémentaire en coordonnées cartésiennes

Déplacement élémentaire en coordonnées cylindriques
Voir fig.6.

$$d\overrightarrow{OM} = d\rho\vec{e}_\rho + \rho d\theta\vec{e}_\theta + dz\vec{e}_z$$

Déplacement élémentaire en coordonnées cylindriques
Voir fig.7).

$$d\overrightarrow{OM} = dr\vec{e}_r + rd\theta\vec{e}_\theta + r\sin\theta\vec{e}_\varphi$$

2.3 Vitesse instantanée d'un point dans un référentiel donné

Physiquement, la vitesse instantanée, à l'instant t est la variation par unité de temps du vecteur position sur une durée infiniment courte dt.

2.3.1 Définition

Vitesse instantanée – Définition
Soit M et M' deux positions occupées par un point M dans un référentiel donné $\mathcal{R}$, respectivement à l'instant t et à l'instant t'. Le vecteur-vitesse instantanée $\vec{v}(M)|_\mathcal{R}$ du point M dans le référentiel $\mathcal{R}$ est définie par :

$$\vec{v}(M)|_\mathcal{R} = \lim_{t \mapsto t'} \frac{\overrightarrow{MM'}}{t'-t}$$

soit encore

$$\vec{v}(M)|_\mathcal{R} = \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_\mathcal{R}$$

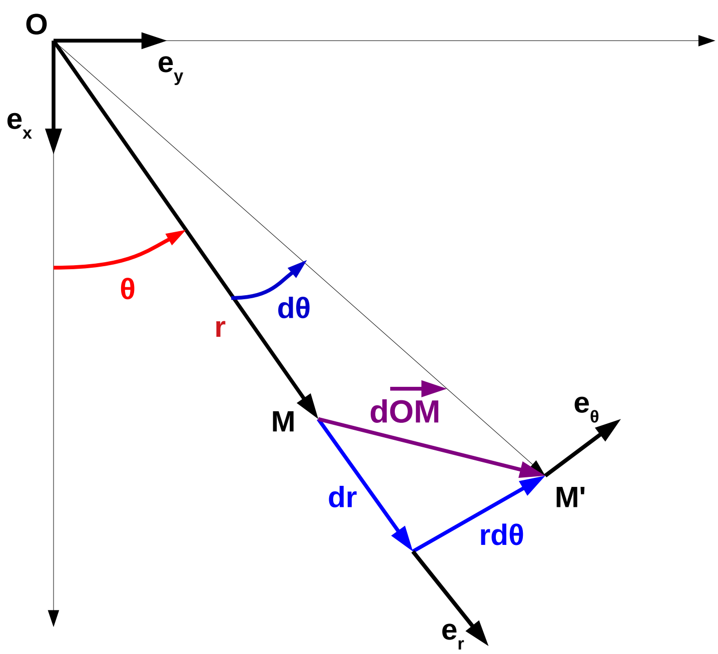


FIGURE 6 – Déplacement élémentaire en coordonnées cylindrique (polaire sur la figure)

☞ *Par définition, les vecteurs déplacement élémentaire et vitesse sont tangents à la trajectoire et orientés dans le sens du mouvement.*

2.3.2 Expressions dans les différentes bases

Les expressions de la vitesse s'obtiennent soit par dérivation du vecteur position, soit en utilisant l'expression du vecteur déplacement élémentaire.

En coordonnées cartésiennes

Vitesse en coordonnées cartésiennes

$$\vec{v}(M) = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y + \dot{z}\vec{e}_z$$

En coordonnées cylindriques

Vitesse en coordonnées cylindriques

$$\vec{v}(M) = \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{z}\vec{e}_z$$

En coordonnées sphériques

Vitesse en coordonnées sphériques

$$\vec{v}(M) = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\sin\theta\,\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$$

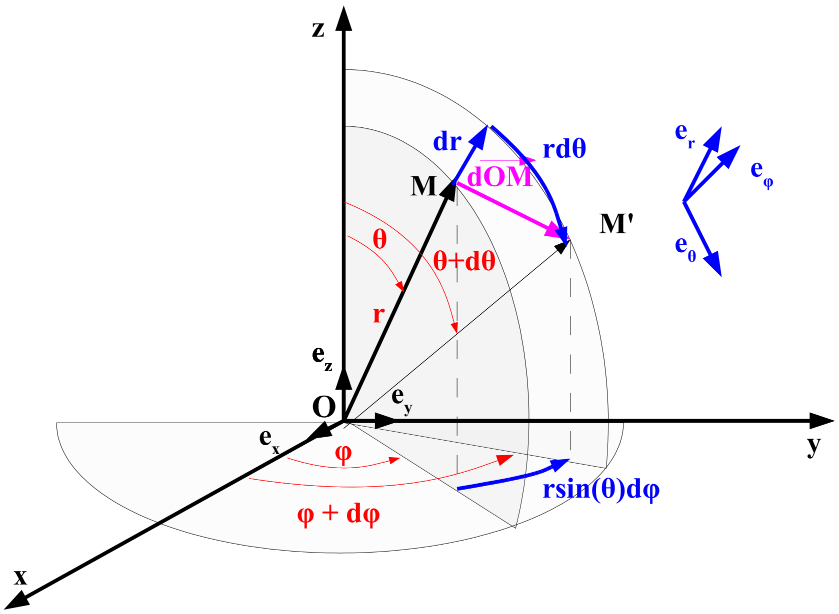


FIGURE 7 – Déplacement élémentaire en coordonnées sphériques

2.4 Accélération d'un point dans un référentiel donné

Physiquement, l'accélération (instantanée) à l'instant t est la variation par unité de temps du vecteur vitesse sur une durée infiniment courte dt.

2.4.1 Définition

Accélération – Définition

Soit M et M' deux positions occupées par un point M dans un référentiel donné $\mathcal{R}$ respectivement à l'instant t et à l'instant t'. Le vecteur-accélération instantanée $\vec{a}(M)|_{\mathcal{R}}$ du point M dans le référentiel $\mathcal{R}$ est définie par :

$$\vec{a}(M)|_{\mathcal{R}} = \lim_{t \mapsto t'} \frac{\vec{v}(M,t') - \vec{v}(M,t)}{t' - t}$$

soit encore

$$\vec{a}(M)|_{\mathcal{R}} = \left(\frac{d\vec{v}(M)}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \left(\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}\right)_{\mathcal{R}}$$

2.4.2 Expressions dans les différentes bases

En coordonnées cartésiennes

Accélération en coordonnées cartésiennes

$$\vec{a}(M) = \ddot{x}\vec{e}_x + \ddot{y}\vec{e}_y + \ddot{z}\vec{e}_z$$

En coordonnées cylindriques

Accélération en coordonnées cylindriques

$$\vec{a}(M) = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\vec{e}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta})\vec{e}_\theta + \ddot{z}\vec{e}_z$$

En coordonnées sphériques

Accélération en coordonnées cylindriques

$$\vec{a}(M) = a_r\vec{e}_r + a_\theta\vec{e}_\theta + a_\varphi\vec{e}_\varphi$$

$$\text{avec : } \begin{cases} a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\sin^2\theta\dot{\varphi}^2 \\ a_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - r\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta \\ a_\varphi = 2r\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta + 2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta + r\sin\theta\ddot{\varphi} \end{cases}$$

2.5 Très important : ne pas confondre système de coordonnées et référentiel !!!

En effet, on peut tout à fait exprimer une vitesse ou une accélération par rapport à un référentiel dans une base mobile par rapport à ce référentiel.

Réciproquement, ce n'est pas parce qu'on écrit une vitesse dans une base que cette vitesse est évaluée par rapport à un référentiel fixe par rapport au système de coordonnés associé à cette base.

3 Etude cinématique de quelques mouvements simples

3.1 Mouvement uniformément accéléré

Application 2

Soit un point M dont l'accélération vaut $a = a\vec{e}_x$ (a et $\vec{e}_x$ constants) à chaque instant et dont la vitesse initiale vaut V_0, et ayant pour position $x_0 = 0$ à $t = 0$. Déterminer la position $x(t)$ de M à chaque instant.

Réponse : $x(t) = \frac{1}{2}a.t^2 + v_0.t$

Réponse

3.2 Mouvement rectiligne sinusoïdal

Application 3

Soit un point M se déplaçant le long d'un axe Ox. Sa position est donnée à chaque instant par $x(t) = a\cos(\omega t)$ où ω et a sont des constantes positives. Déterminer sa vitesse $v(t)$ puis son accélération $a(t)$.

Réponse : $v(t) = -a\omega\sin(\omega t)$, $a(t) = -a\omega^2\cos(\omega t)$

Réponse

3.3 Mouvement circulaire

Application 4

Soit un point M décrivant de façon uniforme un cercle de rayon R à la vitesse angulaire ω. On se place dans la base polaire $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$. Montrer que la vitesse $v(t)$ et l'accélération $a(t)$ du point M vérifie :

$$a(t) = \frac{v^2(t)}{R}$$

Réponse

Sur le Web

Pour visualiser les systèmes de coordonnées dans l'espace :
http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/Meca/Cinematique/Index_Cinema.html

4 Notion sur la cinématique du solide

4.1 Solide indéformable

Solide indéformable
On appelle solide indéformable (S), un système tels que $\forall\ (M, N) \in (S)$, MN est indépendant du temps.

4.2 Mouvement de translation

Solide en translation
Un solide (S) est en translation par rapport aux référentiel $\mathcal{R}$ si $\forall\ t$, $\forall\ M \in (S)$, $\vec{v}(M)_{|\mathcal{R}} = cste$ c'est-à-dire que le champ des vitesses est uniforme dans le solide. Tous les points décrivent la même trajectoire.

Cas particuliers :
— si la trajectoire des points M de (S) est une droite, la translation est *rectiligne* ;
— si la trajectoire des points M de (S) est un cercle, la translation est *circulaire*.

4.3 Mouvement de rotation autour d'un axe fixe

Solide en rotation
Soit une droite Δ fixe dans le référentiel $\mathcal{R}$. Si chaque point M du solide (S) est en mouvement circulaire autour de Δ dans $\mathcal{R}$ alors le solide (S) est en rotation autour de Δ.

Champ des vitesses
Pour tout point $M \in (S)$, la vitesse de ce point dans $\mathcal{R}$ peut s'écrire :

$$\vec{v}(M)_{|\mathcal{R}} = r\omega\vec{e}_\theta$$

avec r la distance M à Δ, $\omega = \dot{\theta}$ la vitesse angulaire de rotation du solide (S) autour Δ et $\vec{e}_\theta$ le vecteur orthoradial de la base polaire.

A chaque instant t, l'ensemble des points M de (S) a même vitesse angulaire.