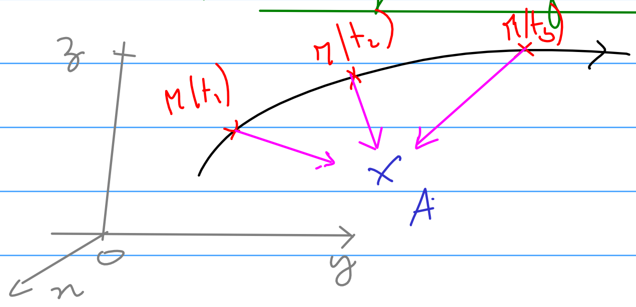
M6 : Mécanique céleste.

1. Mouvement dans un champ de force central et conservatif

1.1. Champ de force central.



M subit une force $\vec{F}$ centrale de centre de force A : $\vec{F} \,//\, \vec{AM}$

1.2. Champ de force conservatif.

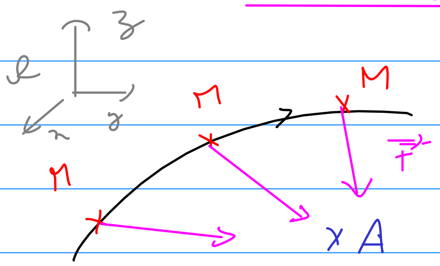
$\vec{F}$ est conservative i.e. elle dérive d'une énergie potentielle : $\vec{F} = -\overrightarrow{grad}\, E_p(M)$ ou

$$\delta W(\vec{F}) = -dE_p(M)$$

$E_p(M)$ fct° ne dépendant que de la position appelée énergie potentielle.

1.3. Conservation du moment cinétique.

1.3.1. Conservation du moment cinétique.



M n'est soumis qu'à $\vec{F}$ centrale de centre de force A.

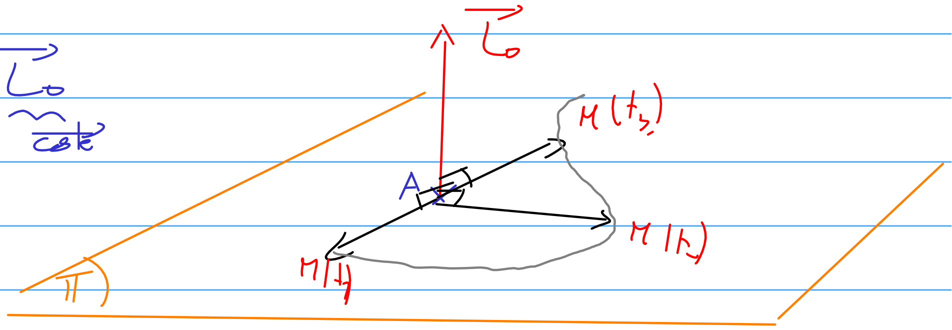
TMC appliqué à M ds R. par rapport à A :

$$\frac{d\vec{L}_A(M)}{dt} = \underbrace{\vec{AM} \wedge \vec{F}}_{\vec{F} // \vec{AM}} = \vec{0} \iff \boxed{\vec{L}_A(M) = \vec{cst} = \vec{L}_0}$$

1.3.2. Conséquence 1 : le mvt est plan.

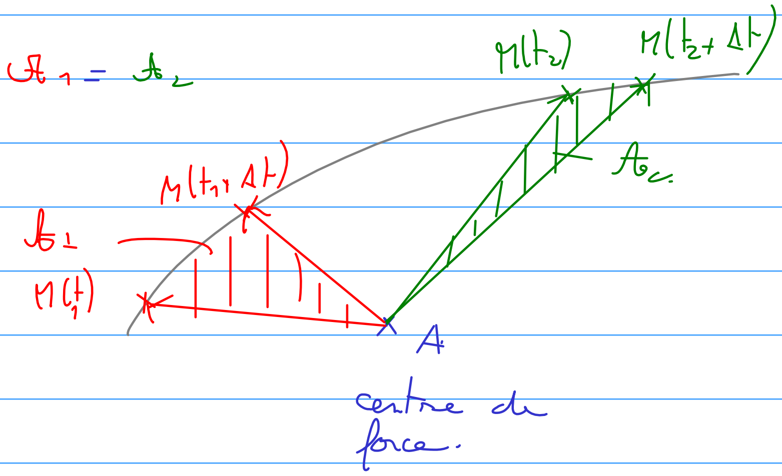
$$\vec{L}_A = \vec{AM} \wedge \vec{p}(t)\,\big|_{\mathcal{R}} = \underbrace{\vec{L}_0}_{cste}$$

$\forall t,\ \vec{AM} \perp \vec{L}_0$



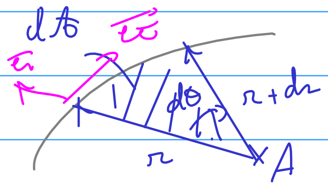
le mvt a lieu ds le plan $\Pi \perp \vec{L}_0$ et $\ni A$.

1.3.3. Loi des aires.



$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Loi des aires :}\\ \text{En des durées égales,}\\ \text{les aires balayées}\\ \text{par le rayon}\\ \text{vecteur } \vec{AM} \text{ sont}\\ \text{égales}\end{array}}$$

Preuve : Mq : $\frac{d\mathcal{A}}{dt} = cste.$



$d\mathcal{A}$: aire balayée pdt dt

$d\mathcal{A} = \frac{1}{2} r^2 d\theta \Rightarrow \frac{d\mathcal{A}}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta}$

$\vec{F}$ centrale de centre A $\Rightarrow \vec{L}_A = cste = \vec{AM} \wedge m\vec{v}$

$= r\vec{e_r} \wedge m(\dot{r}\vec{e_r} + r\dot{\theta}\vec{e_\theta})$

$= m r^2 \dot{\theta}\,\vec{e_z} = cste$

$\Rightarrow \boxed{r^2\dot{\theta} = C = cste}$

$\Rightarrow \frac{d\mathcal{A}}{dt} = \frac{1}{2} C = cste$ cqfd

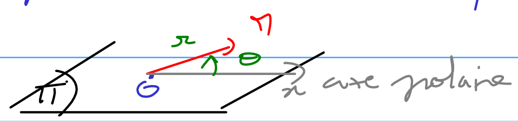
1.4. Conservation de l'énergie mécanique.

$\vec{F}$ unique force et est conservatif $\Rightarrow$ syst conservatif

$\Rightarrow$ $\boxed{E_m = \text{cste.}}$

1.5. Energie potentielle effective.

Mvt plan $\Rightarrow M(r, \theta)$ pb à 2 degrés de liberté.



+ M soumis à une force $\vec{F}$ centrale de centre O et conservative d'énergie potentielle $E_p(r)$.

My ce pb est équivalent à un pb a un degré de liberté. (coord r).

Energie mécanique :

$$E_m = E_c + E_p(r) = \frac{1}{2} m v^2 + E_p(r) \quad \text{avec} \quad \vec{v}\begin{pmatrix} \dot{r} \\ r\dot{\theta} \end{pmatrix}$$

$$E_m = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m r^2 \dot{\theta}^2 + E_p(r)$$

Exprimons $\dot{\theta} = f(r)$.

Conservation du moment cinétique : $\vec{L_O} = \vec{cste} = \vec{OM} \wedge m\vec{v}(M)$

$$= m r \vec{e_r} \wedge (\dot{r}\vec{e_r} + r\dot{\theta}\vec{e_\theta})$$

$$= m r^2 \dot{\theta} \vec{e_z}$$

$$\Rightarrow \boxed{r^2 \dot{\theta} = \frac{L_O}{m} = C}$$

$$\Rightarrow \dot{\theta} = \frac{C}{r^2}$$

D'où $\frac{1}{2} m r^2 \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} m r^2 \frac{C^2}{r^4} = \frac{1}{2} m \frac{C^2}{r^2}$

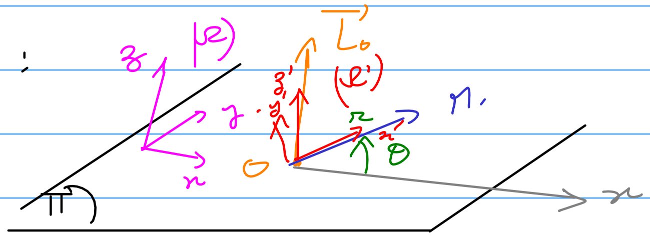
D'où $E_m = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m \frac{C^2}{r^2} + E_p(r)$

$$E_m = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \underbrace{\frac{1}{2} m \frac{C^2}{r^2} + E_p(r)}_{E_{p,eff}(r)}$$

$$\boxed{E_m = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + E_{p,eff}(r)} \quad (*) \quad \text{avec} \quad \boxed{E_{p,eff}(r) = E_p(r) + \frac{1}{2} m \frac{C^2}{r^2}}$$

énergie mécanique d'un pt matériel $M(m)$ ne pouvant se déplacer que le long d'un axe (cond $r \geq 0$) et d'énergie potentielle $E_{p,eff}(r)$.

Rem :



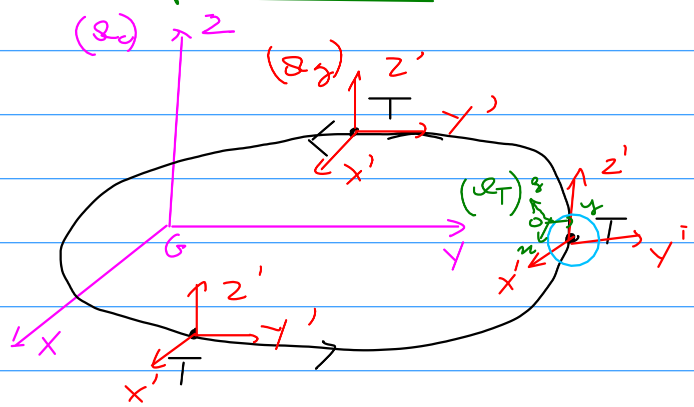
(R') en rotation à la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ par rapport à (R)
(R') non galiléen

$E_m = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + E_{p,eff}(r)$ = énergie mécanique exprimée ds R'

Voir MP.

2. Mouvement dans un champ de force gravitationnelle

2.1. Ref d'étude.



(R_c) : référentiel de Copernic. $(GXYZ)$
G = c.M. du système solaire ≈ c.M. du Soleil.
GX, GY, GZ : axe fixes i.e. pointant vers des étoiles lointaines

$(\mathcal{R}_g)$: référentiel géocentrique $(TX'Y'Z')$; $(\mathcal{R}_g)$ en translation / $(\mathcal{R}_c)$ non rectiligne
$T \equiv$ C.M de la Terre
$TX \parallel GX$, $TY \parallel GY$, $TZ \parallel GZ$

$(\mathcal{R}_T)$: référentiel terrestre $(Oxyz)$ $(\mathcal{R}_T)$ en rotation / $(\mathcal{R}_g)$

$(\mathcal{R}_c)$, $(\mathcal{R}_g)$, $(\mathcal{R}_T)$ galiléens ?

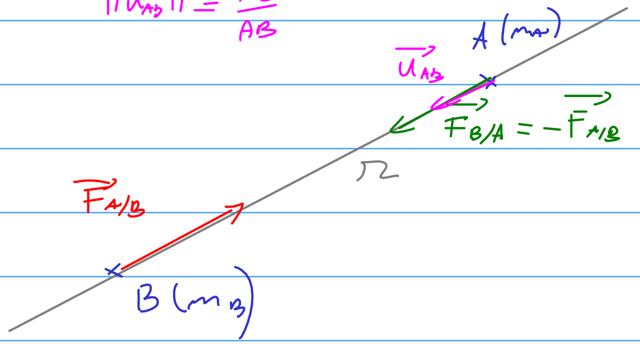
$(\mathcal{R}_c)$ $\equiv$ galiléen (excellente approximation)

$(\mathcal{R}_g)$ $\equiv$ non galiléen mais pour une durée $\tau \ll 1$ an,
$\mathcal{R}_g \equiv$ galiléen.

$(\mathcal{R}_T)$ $\equiv$ non galiléen mais pour une durée $\tau \ll 1$ jour
$\mathcal{R}_T \equiv$ galiléen. (Voir le pendule de Foucault)

2.2. Force gravitationnelle

$\|\vec{u}_{AB}\| = \frac{\vec{AB}}{AB}$



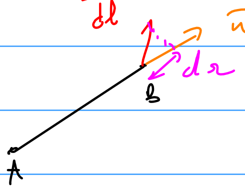
$$\boxed{\vec{F}_{A/B} = -G\,\frac{m_A m_B}{r^2}\,\vec{u}_{AB}}$$

cste de gravitation universelle
$G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ \mathrm{N.kg^{-2}\,m^2}$

Rem : A et B sont soit :
- 2 pts matériels de masse m_A et m_B
- C.M. des 2 corps matériels à répartition sphérique de masse i.e. $\rho(M) = \rho(r)$

2.3. Energie potentielle gravitationnelle

$$\delta W(\vec{F}_{A/B}) = -\frac{G m_A m_B}{r^2}\,\vec{u}_{AB}\cdot\vec{dl} = -\frac{G m_A m_B}{r^2}\,dr$$



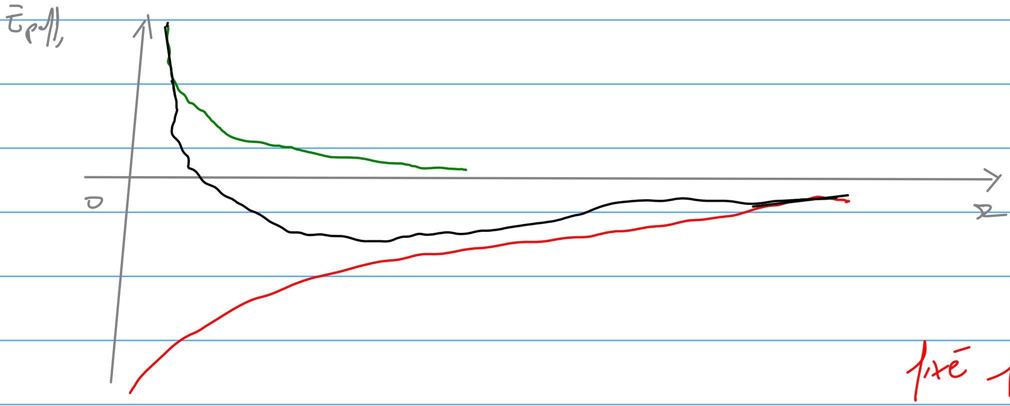
$$= d\left(+\frac{G m_A m_B}{r} + K\right) = -dE_p(r)$$

On pose $E_p(r) \xrightarrow[r \to +\infty]{} 0 \Rightarrow \boxed{E_p(r) = -\frac{G m_A m_B}{r}}$

2.4. Analyse qualitative du mvt

$$E_{p\,eff} = E_p(r) + \frac{1}{2} m_A \frac{C^2}{r^2} = -\frac{G m_A m_B}{r} + \frac{1}{2} m_A \frac{C^2}{r^2}$$

fixé par les C.I. ($C = \frac{L_0}{m}$)



fixé par les C.I.

$$E_m = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + E_{p\,eff}(r) = cste = E_{m,0}$$

Rappel : zone accessible de l'espace tq $E_m \geq E_p(r)$

Initialement : $E_m = E_{m,0} = cte$, le corps de masse m provient de l'∞.

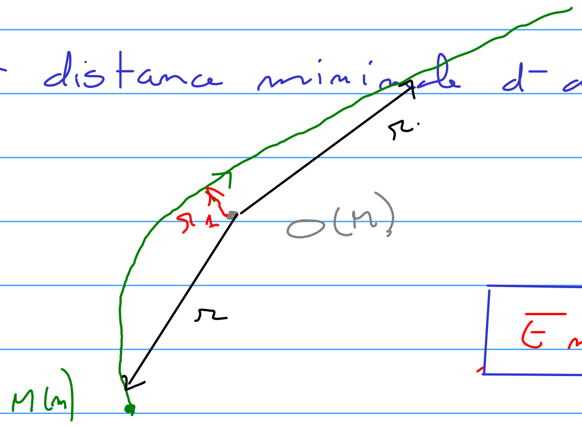
(1) $E_m > 0$

$r \in [r_1, +\infty[$

O = centre de l'astre attracteur.

r non borné = état diffusion.

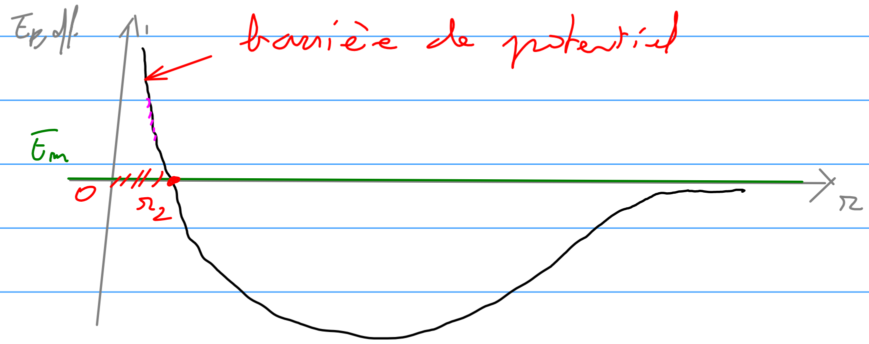
r_1 = distance minimale d'approche donnée par $E_m = E_{p\,eff}(r_1)$

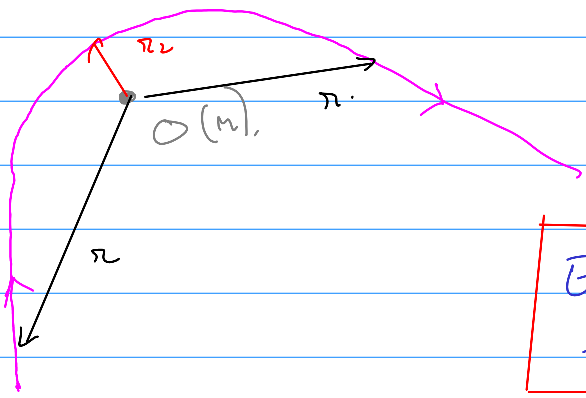


— branche hyperbolique

$$\boxed{E_m > 0 : \text{trajectoire hyperbolique}}$$

② $E_m = 0$





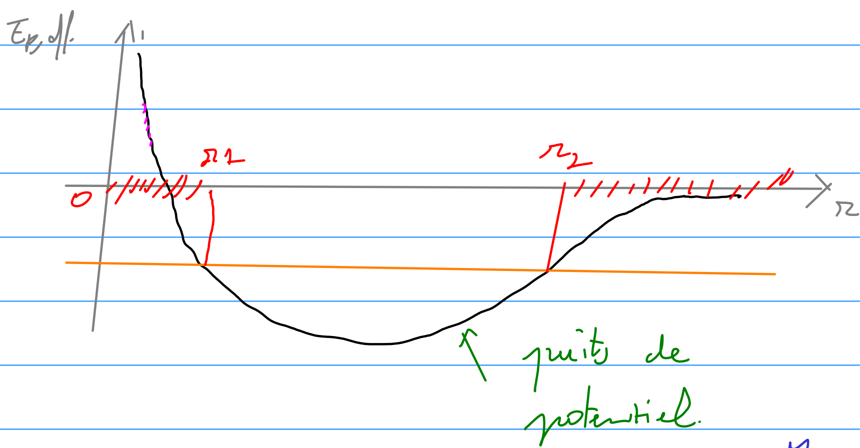
$r \in [r_2, +\infty[$
État de diffusion.

r_2 : distance minimale d'approche :
$E_m = E_{p\,eff}(r_2)$

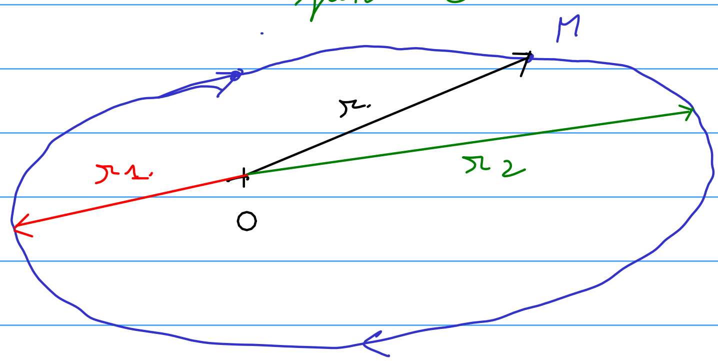
– parabole

$\boxed{E_m = 0 \text{ : trajectoire parabolique}}$

③ $E_m < 0$



$r \in [r_1, r_2]$
État lié.



$\boxed{E_m < 0 \text{ : trajectoire elliptique.}}$

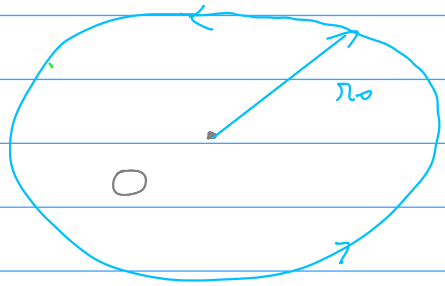
④ E_m minimale i-e $E_m = \min(E_{p,eff})$

$r = r_0$ tq

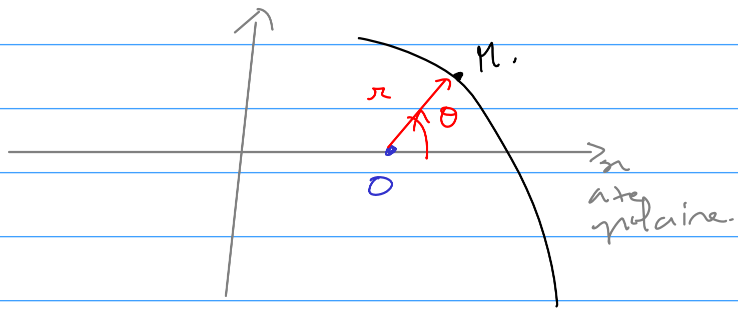
$E_m = \min(E_{p,eff}, r)$

Etat lié

$$\boxed{\text{Em minimale : trajectoire circulaire}}$$



Complément : les trajectoires d'un corps plongé dans champ de force gravitationnelle sont des coniques : hyperbole, parabole, ellipse.



Equation de la trajectoire :

$$r(\theta) = \frac{p}{1 + e\cos(\theta - \theta_0)}$$

p : paramètre
e : excentricité

} dépend des C.I.

e	Em.	Trajectoire
> 1	> 0	hyperbole
= 1	= 0	parabole
< 1	< 0	elliptique
= 0	minimale	cercle

3. Mouvement des planètes - Lois de Kepler.

3.1. 1ère loi de Kepler

3.2. 2è loi de Kepler

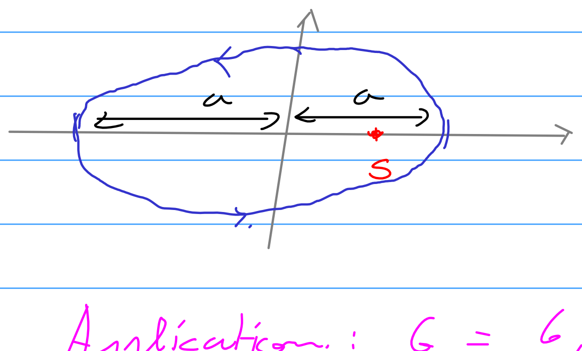
3.3. 3è loi de Kepler

$$\boxed{\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM_s}}$$

T : période de révolution autour du Soleil

a : demi-grand axe de l'orbite.

M_s : masse du Soleil



Application : $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ N\,m^2\,kg^{-2}$, $a = 1\ u.a.$
Masse du Soleil ? $= 1{,}5 \times 10^{11}\ m$

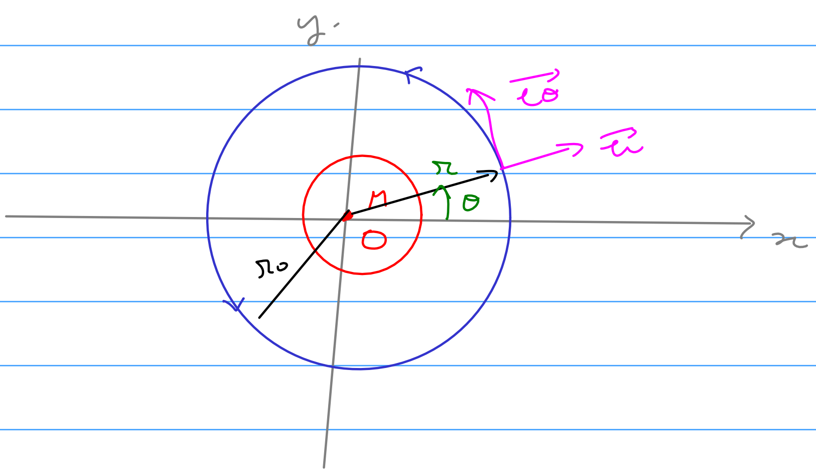
$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM_s} \Rightarrow M_s = \frac{4\pi^2}{G} \times \frac{a^3}{T^2} = 2 \times 10^{30}\ kg$$

3. 4. Généralisation

Astre attracteur de centre O de masse M qq.
Corps $M(m)$ soumis à l'attraction gravitationnelle de ce corps et en mvt elliptique. (ex : satellite en orbite autour de la Terre)
Lois Kepler s'appliquent aux 3 lois :

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$$

4. Mouvement circulaire



$\vec{F} = -\frac{GMm}{r_0^2}\vec{e_r}$

- centrale $\Rightarrow \vec{L_O} = \vec{cste}$
- conservative $\Rightarrow E_m = cste$

4. 1. Le mouvement est uniforme

Méthode 1 : $\vec{L_O} = \vec{cste} \Leftrightarrow m r_0 \vec{e_r} \wedge r_0 \dot\theta \vec{e_\theta} = \vec{L_O}$
$\Leftrightarrow r_0^2 \dot\theta = cste$
$\Leftrightarrow \dot\theta = cste$. cqfd

Méthode 2 : $E_m = cste \Leftrightarrow \frac{1}{2}mv^2 - \underbrace{\frac{GMm}{r_0}}_{cste} = cste$ cqfd.
$\Leftrightarrow v = cste$

Méthode 3 : RFD

On note v_0 la vitesse et ω la vitesse angulaire

4.2. Norme de la vitesse

Syst : $M\,(m)$

Réf : $\mathcal{R}$, galiléen

IDF : $\vec{F} = -\dfrac{GMm}{r^2}\,\vec{e_r}$

PFD :

$$m\,\vec{a} = \vec{F} \qquad \text{avec} \qquad \vec{a}\begin{pmatrix} \cancel{\ddot{r}} - r_0\dot{\theta}^2 \\ \cancel{2\dot{r}\dot{\theta}} + \cancel{r\ddot{\theta}} \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow -m\,r_0\,\dot{\theta}^2 = -\frac{GMm}{r_0^2}$$

$$\Leftrightarrow r_0^2\omega^2 = +\frac{GM}{r_0} \Leftrightarrow \boxed{v_0 = \sqrt{\frac{GM}{r_0}}}$$

4.3. Energie mécanique.

$$E_m = \frac{1}{2}m v_0^2 - \frac{GMm}{r_0} = \frac{1}{2}\frac{GMm}{r_0} - \frac{GMm}{r_0}$$

$$\Rightarrow \boxed{E_m = -\frac{GMm}{2r_0}}$$

$E_m < 0$: état lié ouf !

4.4. 3ᵉ loi Kepler

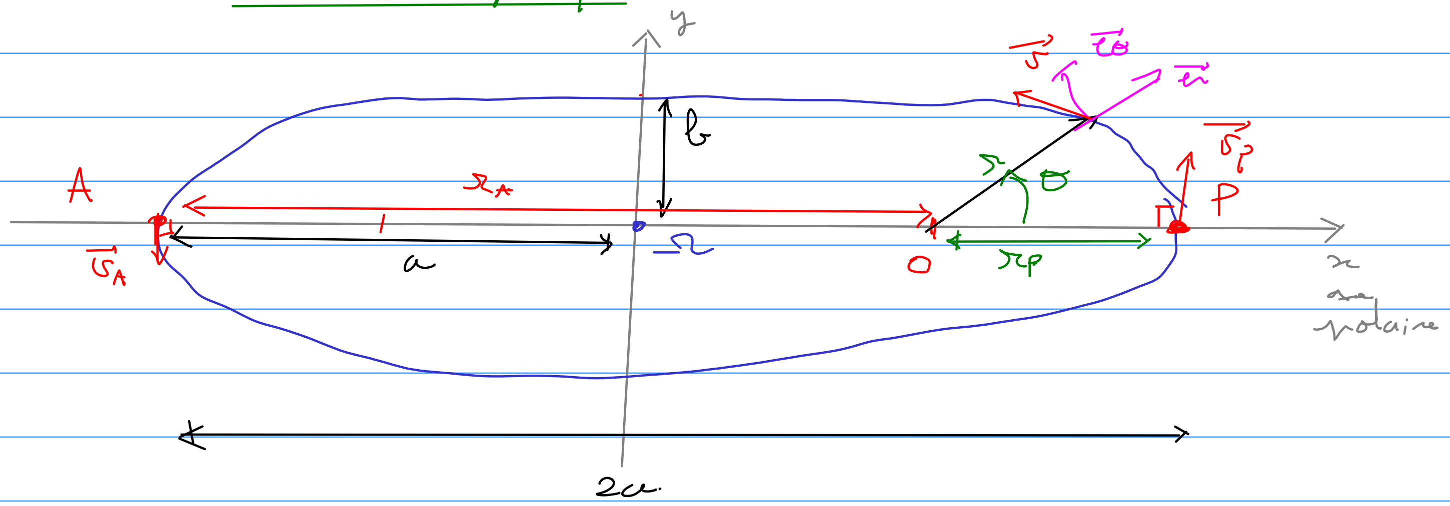
$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{T^2}{r_0^3} = ? \qquad T = \frac{2\pi r_0}{v_0}$$

D'où : $$\frac{T^2}{r_0^3} = \frac{4\pi^2 r_0^2}{r_0^3 v_0^2} = \frac{4\pi^2}{r_0 v_0^2}$$

Or $v_0 = \sqrt{\dfrac{GM}{r_0}}$ d'où : $$\boxed{\frac{T^2}{r_0^3} = \frac{4\pi^2}{GM}}$$

5. Mouvement elliptique

5-1. Orbite elliptique



P : périgée
A : apogée

Relation utile : * (aire de l'ellipse : $S = \pi a b$)
* $2a = r_A + r_P$

Équation de l'ellipse : $r(\theta) = \dfrac{p}{1 + e\cos\theta}$

avec $e < 1$
($e = 0$: cercle)

Application : $p = f(e, a)$

$2a = r_A + r_P$ avec $r_P = r(\theta = 0) = \dfrac{p}{1+e}$

$r_A = r(\theta = \pi) = \dfrac{p}{1-e}$

D'où $2a = p\left(\dfrac{1}{1+e} + \dfrac{1}{1-e}\right) = p\left(\dfrac{2}{1-e^2}\right)$

$\Rightarrow p = a(1-e^2)$

5. 2. Exploitation de la conservation du moment cinétique

$\vec{L}_A = \vec{L}_P$ (A : apogée, P : périgée)

$\Leftrightarrow \boxed{r_A v_A = r_P v_P}$

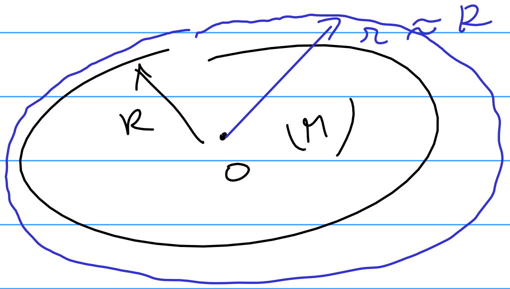
5. 3 Energie mécanique

Rappel : pour une trajectoire circulaire : $E_m = -\frac{GMm}{2r}$

↳ $\boxed{E_m = -\frac{GMm}{2a}}$

6. Vitesses de libération

6. 1. 1ère vitesse de libération - Orbite basse



Mvt circulaire :

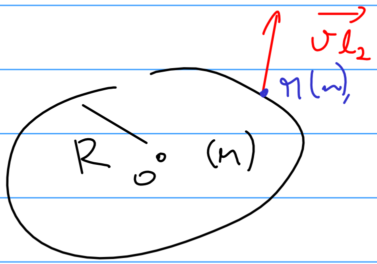
$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

Or $r \approx R$

$$\boxed{v_{l,1} = \sqrt{\frac{GM}{R}}}$$

O.G. : Sur Terre, $R_T = 6\,370$ km, $M_T = 6 \times 10^{24}$ kg $\Big\}$ $v_{l,1} \sim 10$ km/s

6. 2. Deuxième vitesse de libération.



Pour échapper à l'attraction terrestre, il faut que :

$$\underline{E_m \geq 0}$$

avec $E_m = E_{m,0} = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{GM m}{R}$

D'où $E_m \geq 0 \Rightarrow \boxed{v \geq \sqrt{\frac{2GM}{R}}}$

O.G. : à la surface de la Terre, $v_{l_2} = 11,2 \, km.s^{-1}$