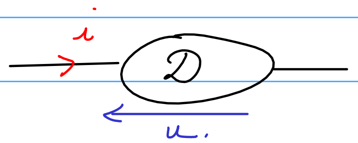
S13 Impédance

Dans dans le cours, le régime est sinusoïdal.
Tous les signaux sont de la forme $s(t) = S_m \cos(\omega t + \varphi)$.

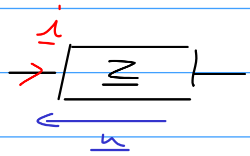
1. Impédance complexe

1.1. Définition



impédance complexe de $\mathcal{D}$ (Ohm)

$$\boxed{\underline{u} = \underline{Z}\,\underline{i}}$$



$\mathcal{D}$ dipole linéaire

[loi de fonctionnement de $\mathcal{D}$ en représentat° complexe

Rem : conv générateur $\underline{u} = -\underline{Z}\,\underline{i}$

On peut écrire : $\underline{Z} = R + jX$ ou $\underline{Z} = Z e^{j\varphi}$

$R = \mathrm{Re}(\underline{Z})$ $\quad Z = |\underline{Z}|$

$X = \mathrm{Im}(\underline{Z})$ $\quad \varphi = \arg(\underline{Z})$

1.2. Impédance, résistance, réactance, admittance

Impédance : $Z = |\underline{Z}|$

$$\underline{Z} = R + jX$$

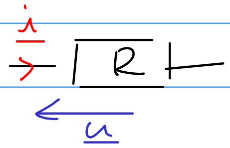
R : résistance — dissipat° d'énergie.

X : réactance — pas de dissipat° d'énergie

Admittance (complexe) : $\underline{Y} = \dfrac{1}{\underline{Z}}$

2. Impédance du conducteur ohmique.

2.1. Impédance complexe



$\underline{u} = \underline{Z}\,\underline{i}$, $\underline{Z}$?

On sait que : $u = Ri \Rightarrow \underline{u} = R\underline{i}$

Donc $\boxed{\underline{Z} = R.}$

2.2. Comportement énergétique.

$\underline{Z} = R \Rightarrow$ conducteur ohmique purement résistif

↳ dissipe toute l'énergie reçue.

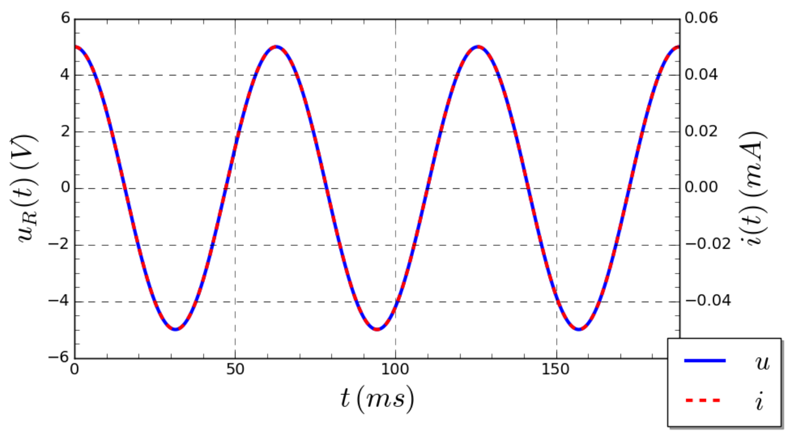
2.3. ???

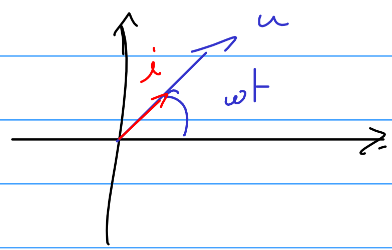
$u(t) = u_m \cos(\omega t) \Rightarrow \underline{u} = \underline{u_m}\, e^{j\omega t}$, $\underline{u_m} = u_m$.

$i(t) = i_m \cos(\omega t + \varphi)$; $\underline{i} = \underline{i_m}\, e^{j\omega t}$, $\underline{i_m} = i_m e^{j\varphi}$

$\underline{u} = R\underline{i} \Leftrightarrow \underline{u_m} = R\underline{i_m} \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{u_m = R i_m.} \\ \boxed{\varphi = 0} \end{cases}$

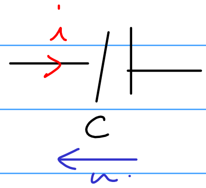
$\varphi = 0 \Rightarrow u(t)$ et $i(t)$ en phase





3. Condensateur idéal.

3.1. Impédance



$\underline{u} = \underline{Z}\,\underline{i}$, $\underline{Z}$?

$i = C\dot{u} \Rightarrow \underline{i} = C\underline{\dot{u}} = jC\omega\,\underline{u}$

Donc $\boxed{\underline{Z} = \dfrac{1}{jC\omega}}$

3.2. Comportement énergétique.

$\underline{Z} = \dfrac{1}{jC\omega}$ purement réactif $\Rightarrow$ un condensateur ne dissipe pas d'énergie

3.3. Lien entre tension et courant.

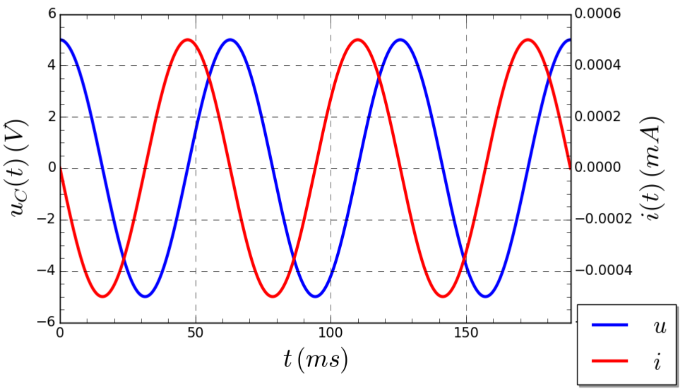
$u(t) = u_m \cos(\omega t) \Rightarrow \underline{u} = \underline{u_m}\, e^{j\omega t}$, $\underline{u_m} = u_m$

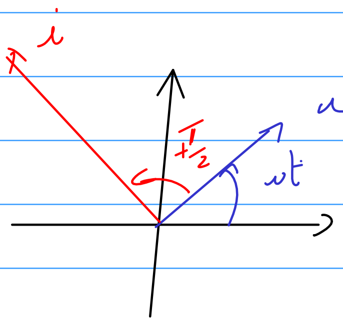
$i(t) = i_m \cos(\omega t + \varphi)$ $\quad \underline{i} = \underline{i_m}\, e^{j\omega t}$, $\underline{i_m} = i_m\, e^{j\varphi}$

$\underline{u} = \underline{Z}\,\underline{i} \Rightarrow \underline{u_m} = \underline{Z}\,\underline{i_m}$ ($\underline{Z} = \frac{1}{jC\omega}$) $\Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{u_m = Z\, i_m = \dfrac{i_m}{C\omega}} \\ 0 = \arg(\underline{Z}) + \arg(\underline{i_m}) \end{cases}$

$0 = \underbrace{\arg(\underline{Z})}_{-\frac{\pi}{2}} + \underbrace{\arg(\underline{i_m})}_{\varphi}$

$\Rightarrow \boxed{\varphi = +\frac{\pi}{2}}$





3.4. Comportement asymptotique.

$u_m = Z i_m$ avec $Z = \dfrac{1}{C\omega}$

Si $\omega \rightarrow +\infty$ (H.F) : $Z \rightarrow 0 \Rightarrow \forall i,\ u = 0$

Si $\omega \to 0$ (B.F.) : $Z \to +\infty \Rightarrow \forall u,\ i = 0$

$\to$ régime stationnaire.

4. Bobine idéale

4.1. Impédance

i L, u

$\underline{u} = \underline{Z}\,\underline{i}$, $\underline{Z}$? $u = L\dfrac{di}{dt} \Rightarrow \underline{u} = L\dfrac{d\underline{i}}{dt} = jL\omega\,\underline{i}$

donc $\boxed{\underline{Z} = jL\omega}$

4.2. Comportement énergétique

La bobine est un dipôle purement réactif donc elle ne dissipe pas d'énergie.

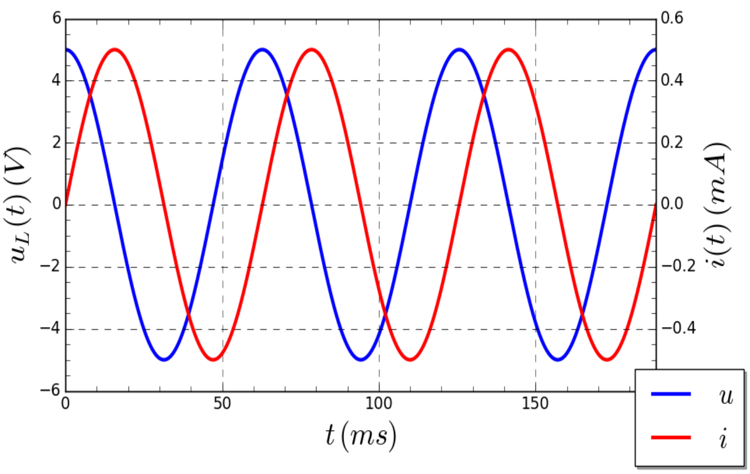
4.3. Lien entre tension et courant

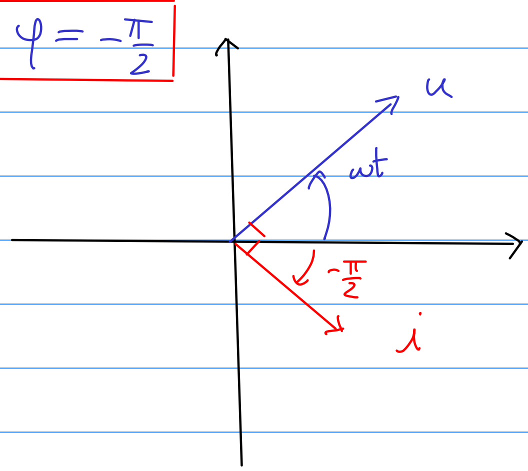
$u(t) = U_m \cos(\omega t) \Rightarrow \underline{u} = \underline{u_m}\, e^{j\omega t}$, $\underline{u_m} = u_m$

$i(t) = i_m \cos(\omega t + \varphi) \Rightarrow \underline{i} = \underline{i_m}\, e^{j\omega t}$, $\underline{i_m} = i_m e^{j\varphi}$

$\underline{u} = \underline{Z}\,\underline{i} \Rightarrow \underline{u_m} = \underline{Z}\,\underline{i_m} \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{u_m = Z i_m = L\omega i_m} \\ 0 = \underbrace{\arg(\underline{Z})}_{+\frac{\pi}{2}} + \varphi \end{cases}$

$\Rightarrow \boxed{\varphi = -\dfrac{\pi}{2}}$





4.4. Comportement asymptotique

Si $\omega \to 0$ (B.F. / Régime stationnaire) : $Z \to 0 \Rightarrow \forall i,\ u = 0$ soit ⇔ ——

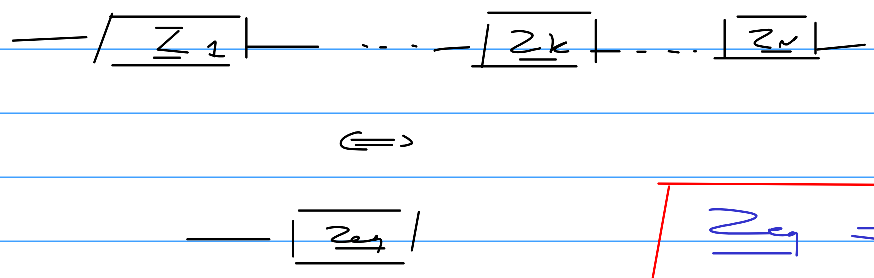
Si $\omega \to +\infty$ (H.F.) : $Z \to +\infty \Rightarrow \forall u,\ i = 0$ soit ⇔

(inertie de la bobine)

5. Association d'impédances

Démo : voir S9.

5.1 Association série.

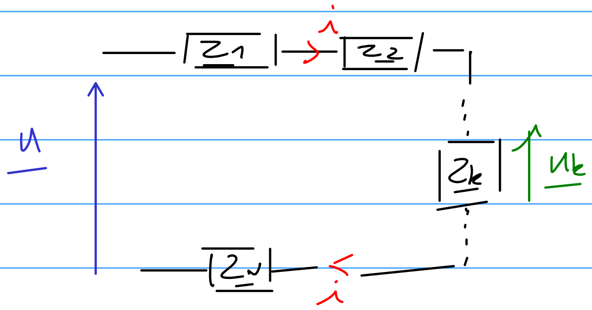


$$\boxed{\underline{Z}_{eq} = \sum_k \underline{Z}_k}$$

Application : bobine réelle : 

Impédance ? $\underline{Z} = r + jL\omega$

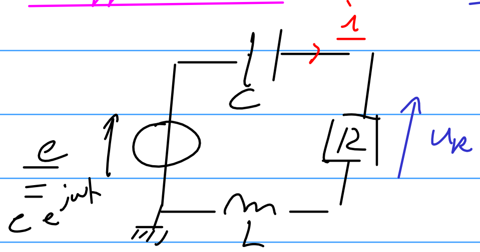
5.2. Pont diviseur de tension.



Si important !

$$\boxed{\underline{u}_k = \frac{\underline{Z}_k}{\sum_\ell \underline{Z}_\ell}\,\underline{u}}$$ ou $$\boxed{\underline{u}_{km} = \frac{\underline{Z}_k}{\sum_\ell \underline{Z}_\ell}\,\underline{u}_m}$$

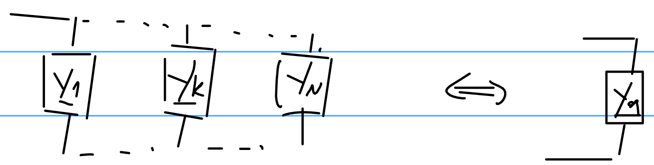
Application : $\underline{i}_m = f(e)$ en une ligne.



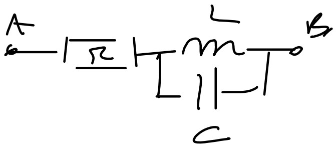
$$\underline{i}_m = \frac{\underline{u}_{Km}}{R} = \frac{1}{R} \times \frac{R\,\underline{e}}{R + j\left(L\omega + \frac{1}{jC\omega}\right)} = \frac{\underline{e}}{R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)}$$

5.2. Association parallèle.

5.2.1. Impédance équivalente.



$$\boxed{\underline{Y}_{eq} = \sum \underline{Y}_k \quad \text{ou} \quad \frac{1}{\underline{Z}_{eq}} = \sum \frac{1}{\underline{Z}_k}}$$

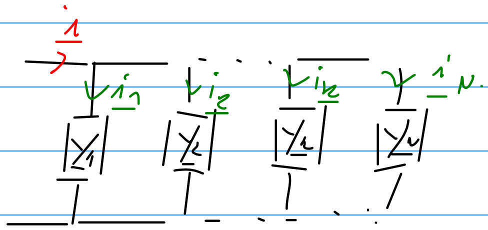
Application :  impédance ?

$\underline{Y_L} // \underline{Y_C}$: $\underline{Y_{eq_1}} = \underline{Y_L} + \underline{Y_C} = \frac{1}{jL\omega} + jC\omega$

$$\Rightarrow \underline{Z_{eq_1}} = \left(\frac{1}{jL\omega} + jC\omega\right)^{-1}$$

D'où $\underline{Z_{eq}} = R + \underline{Z_{eq_1}} = R + \left(\frac{1}{jL\omega} + jC\omega\right)^{-1}$

5.2.2. Pont diviseur de courant



$$\boxed{\underline{i_k} = \frac{\underline{Y_k}}{\sum_\ell \underline{Y_\ell}} \underline{i}}$$

ou

$$\boxed{\underline{i_{k_m}} = \frac{\underline{Y_k}}{\sum_\ell \underline{Y_\ell}} \underline{i_m}}$$