S1
Modèle de l'oscillateur harmonique.

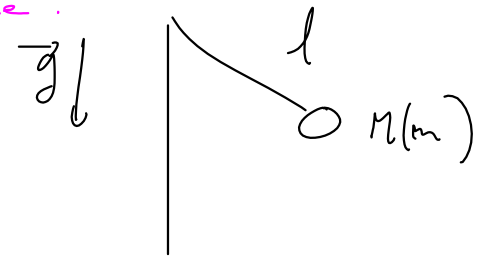
1. Oscillateur

1.1. Déf

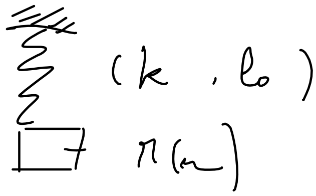
Système physique prend le même état à intervalle de temps cst, appelé période.

1.2. Exemples

Mécanique.



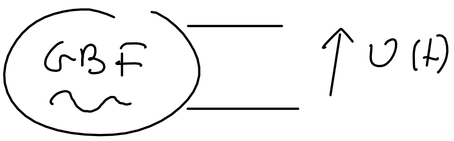
pendule

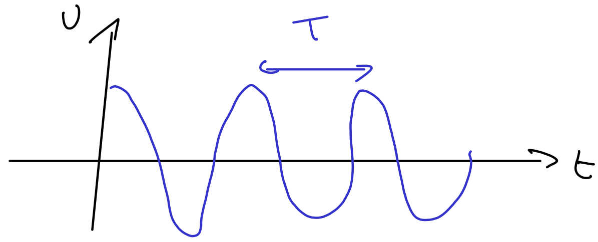


syst {masse + ressort}

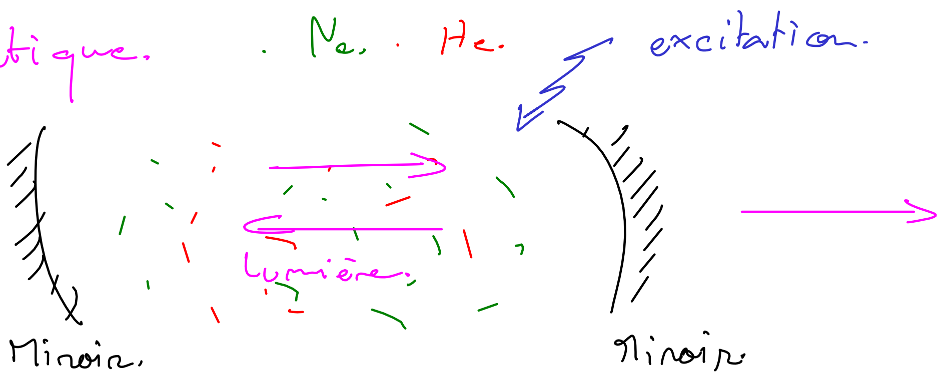
Ex : oscillateur à quartz.....

Electrique.





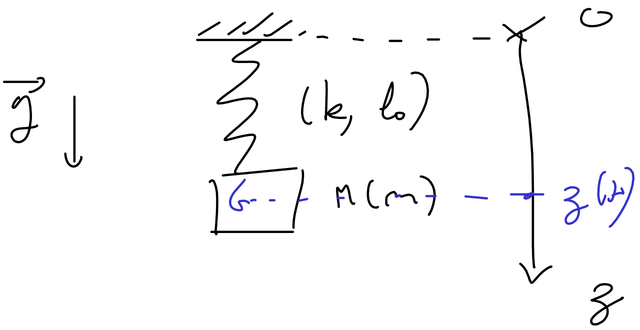
Optique.



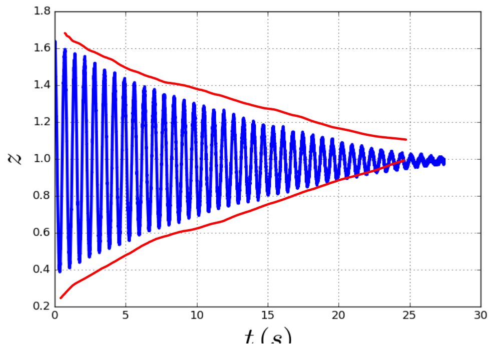
Laser He - Ne.

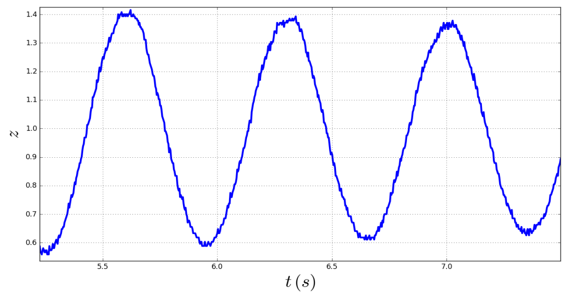
2. Système {masse + ressort}

2.1. Que montre l'expérience ?



T : pseudo-période





Sur un temps "long" : oscillations amorties

Sur un temps "court" : oscillations d'amplitude ≈ cste

Paramètres d'influence :
- raideur k
- masse m
- amplitude initiale
- milieu
- longueur à vide l_0
- pesanteur g

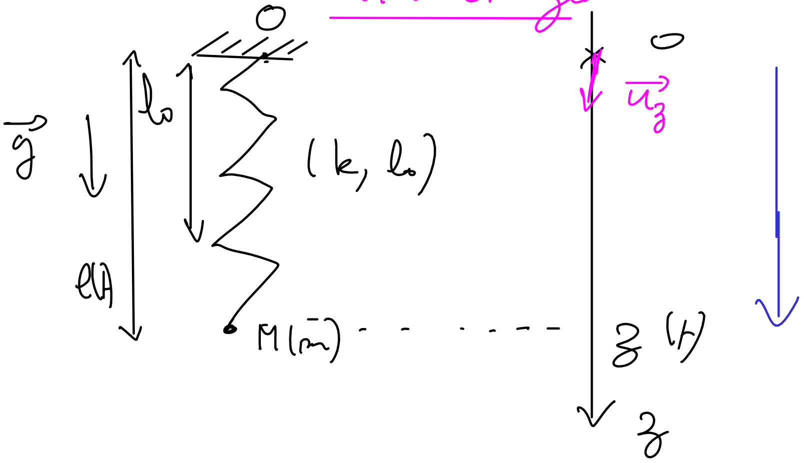
⋮

$k \nearrow$: $T \searrow$

$m \nearrow$: $T \nearrow$

2.2. Modélisation

2.2.1. Paramétrage



$\|\vec{u_z}\| = 1$

$[\vec{u_z}] = \emptyset$

2.2.2. 1ère analyse

① Syst : masselotte $M(m)$

② Réf : labo $\mathcal{R}$, galiléen

③ Inventaire des forces (IDF) :

- poids $\vec{P} = m\vec{g} = mg\vec{u_z}$
- frottements de l'air : $\vec{f}$
- force de rappel du ressort $\vec{F}$
- poussée d'Archimède ~~: $\vec{\Pi}$~~

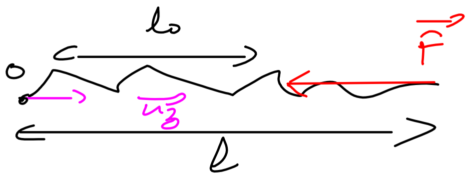
négligé pour alléger les calculs ...

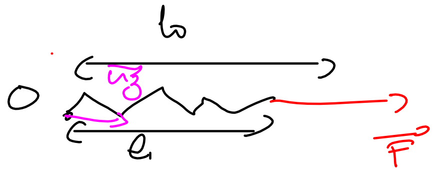
2.2.3. Frottements

Approximation grossière : $\vec{f} = \vec{0}$

On néglige les frottements.

2.2.4 Force de rappel du ressort.





$\vec{F}$ tend à ramener le ressort à la longueur l_0

$\|\vec{F}\| \nearrow$ qd $|\Delta l| = |l - l_0| \nearrow$

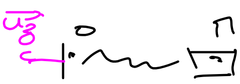
$$\vec{F} = -\underset{>0}{k}(l - l_0)\vec{u_z}$$

Force de rappel du ressort

$$\boxed{\vec{F} = -k(l - l_0)\vec{u_z}}$$

$\vec{u_z}$ et $\vec{OM}$ colinéaire de même sens.

Rem : si $\vec{u_z}$ et $\vec{OM}$ de sens opposés :



$$\vec{F} = +k(l - l_0)\vec{u_z}$$

Ici : $\ell(t) = z(t)$

$\Rightarrow \vec{F} = -k(z-\ell_0)\vec{u_z}$

<u>Méthode</u> : force de rappel du ressort. O~~~•M

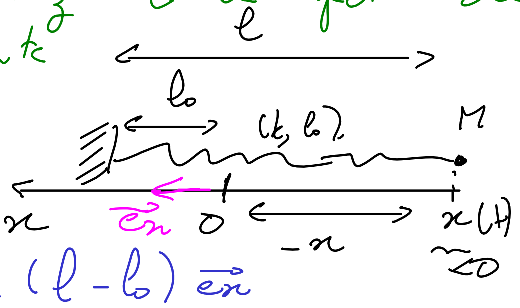
(1) $\vec{F} = k(\ell-\ell_0)\vec{u_z}$

(2) Signe ? Si $\vec{u_z} \parallel \vec{OM}$: $-$

Si $\vec{u_z}$ anti// $\vec{OM}$: $+$

(3) Exprimez ℓ en fct° de la coordonnée pertinente

<u>Applicat°</u> :



$\vec{F}$ en fct° de x ?

(1) $\vec{F} = \pm k(\ell-\ell_0)\vec{e_x}$

(2) + ou − ? $\vec{e_x}$ anti// à $\vec{OM}$: $+ \Rightarrow \vec{F} = +k(\ell-\ell_0)\vec{e_x}$

(3) $\ell = -x + \ell_0$

D'où $\vec{F} = k(-x+\cancel{\ell_0}-\cancel{\ell_0})\vec{e_x} \Leftrightarrow \vec{F} = -kx\vec{e_x}$

2.3. Equation différentielle du mouvement

(4) 2e loi de Newton appliqué à la masselotte M dans le ref $\mathcal{R}$, galiléen :

$m\vec{a} = \sum \vec{F}_{ext}$

$\Leftrightarrow m\vec{a} = \vec{P} + \vec{f} + \vec{T}$ (*)

avec $\vec{a} = \ddot{z}\,\vec{u_z}$ avec $\ddot{z} = \frac{d^2z}{dt^2}$ dérivée seconde de z par rapport à t.

$\dot{z} = \frac{dz}{dt}$ (vitesse)

(*) : $m\ddot{z}\cancel{\vec{u_z}} = mg\cancel{\vec{u_z}} + \vec{0} - k(z-\ell_0)\cancel{\vec{u_z}}$ × $1/m$

$$\Leftrightarrow \boxed{\ddot{z}(t) + \left(\frac{k}{m}\right) z(t) = g + \frac{k}{m}\ell_0}$$

Equat° différentielle linéaire à coeff cst et ordre 2

$$\ddot{z}(t) + \frac{k}{m}\, z(t) = g + \frac{k}{m}\, l_0 \Rightarrow \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}}$$

$L.T^{-2}$ T^{-2} L T^{-2}

pulsat° propre de l' oscillateur harmonique

$\left[\frac{k}{m}\right] = ?$

$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \times \sqrt{\frac{m}{k}}$: période des oscillat° du système.

2.4. Position d'équilibre

A l'équilibre : $z = z_{eq} = cste$, Que vaut z_{eq} ?

$z = cste \Rightarrow \dot{z} = 0 \Rightarrow \ddot{z} = 0$

L'équa diff est valable :

$$\cancel{\ddot{z}}_{0} + \frac{k}{m}\, z_{eq} = g + \frac{k}{m}\, l_0 \Rightarrow \boxed{z_{eq} = l_0 + \frac{mg}{k}}$$

L $\quad$ L $\quad$ $[F]$ $\quad$ $[F] . L^{-1}$

(car $F = k(l - l_0)$)

$m \nearrow \Rightarrow z_{eq} \nearrow$

$k \nearrow \Rightarrow z_{eq} \searrow$

2.5. Equation différentielle de l'oscillateur harmonique (O.H.)

$$\ddot{z} + \underbrace{\frac{k}{m}}_{\omega_0^2} z = \underbrace{g + \frac{k}{m}\, l_0}_{\omega_0^2 z_{eq}}$$

$$\boxed{\ddot{z} + \omega_0^2 z = \omega_0^2 z_{eq}}$$

Equation d'un oscillateur harmonique (O.H.)

$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$: pulsat° propre de l'oscillateur

z_{eq} : position d'équilibre de l'oscillateur.

2.5. Solut° de l'équation

2.5.1. Solution générale

$$\boxed{z(t) = z_{eq} + A\cos(\omega_0 t + \varphi)}$$

A, φ : ctes d'intégration à déterminer à partir des relat° de continuité.

$$\boxed{z(t) = z_{eq} + a\cos(\omega_0 t) + b\sin(\omega_0 t)} \quad (*)$$

a, b : ctes d'intégration à déterminer à partir des relat° de continuité.

Les oscillations sont sinusoïdales (harmoniques) à la pulsation ω_0 (période $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$)

2.5.2. Solution complète

On détermine a et b à l'aide :
- des conditions initiales (C.I)
- la continuité de :
  - la position $z(t)$
  - la vitesse $\dot{z}(t)$

Fixons des C.I. : à $t = 0^-$: $z(0^-) = z_{eq} + d$

$\dot{z}(0^-) = 0$

* Continuité de $z(t)$ à $t = 0$:

$z(0^+) = z(0^-)$ avec $z(0^-) = z_{eq} + d$ (CI)

$z(0^+) = z_{eq} + a$ (sol $(*)$ de l'équa diff évaluée en 0)

$\Rightarrow \underline{a = d}$

* Continuité de la vitesse $\dot{z}(t)$ à $t=0$: $\dot{z}(0^+)=\dot{z}(0^-)$

↳ Il faut calculer $\dot{z}(t)$.

$$\underbrace{z(t)}_{L} = \underbrace{z_{eq}}_{L} + \underbrace{a}_{L}\cos(\omega_0 t) + \underbrace{b}_{L}\sin(\omega_0 t)$$

$$\Rightarrow \underbrace{\dot{z}(t)}_{L.T^{-1}} = 0 - \underbrace{a}_{L}\underbrace{\omega_0}_{T^{-1}}\sin(\omega_0 t) + \underbrace{b}_{L}\underbrace{\omega_0}_{T^{-1}}\cos(\omega_0 t)$$

$a\cos(\omega_0 t) = a f(u(t))$ avec

$f : x \longrightarrow \cos x$

$u : t \longrightarrow \omega_0 t$

$(f(u(t)))' = u'(t) f'(u(t))$

↳ $f' : x \longrightarrow -\sin x$

$u' : t \longrightarrow \omega_0$

$= \omega_0 - \sin(\omega_0 t)$

avec $\dot{z}(0^-) = 0$ (C.I.)

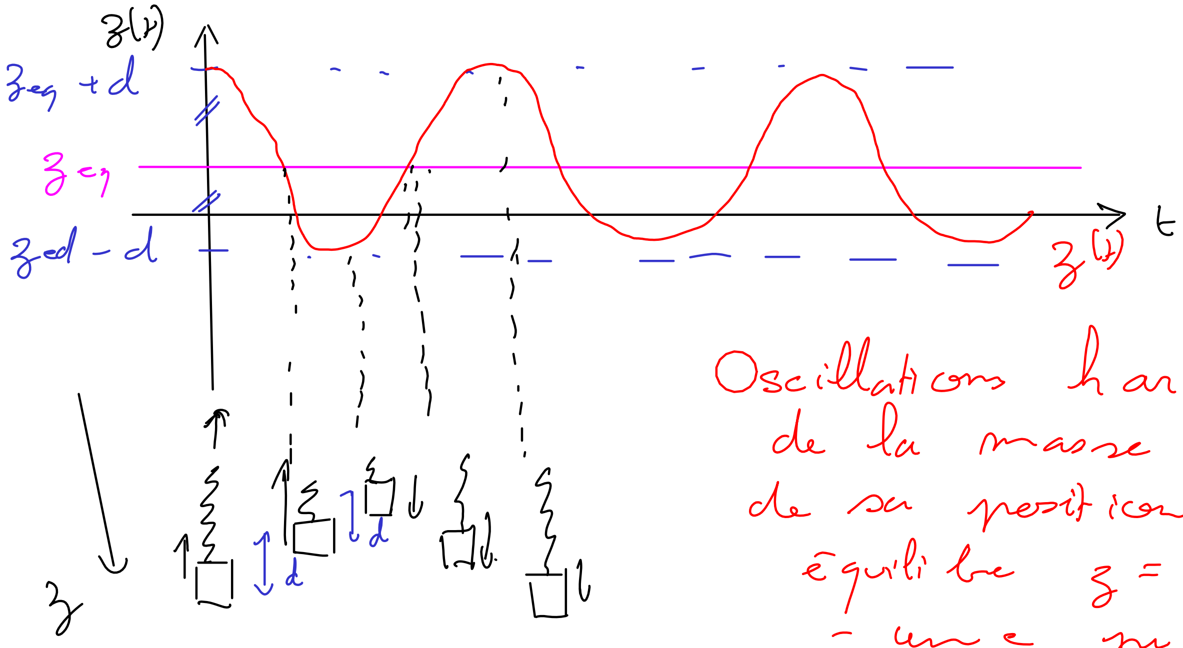
$\dot{z}(0^+) = b\omega_0$

D'où : $b\omega_0 = 0$

$(\omega_0 \neq 0)$ $\Leftrightarrow$ $\underline{b=0}$

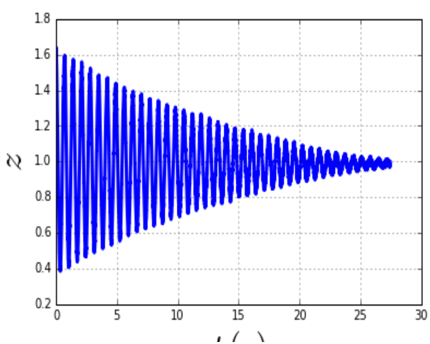
D'où la solution complète :

$$\boxed{z(t) = z_{eq} + d\cos(\omega_0 t)}$$

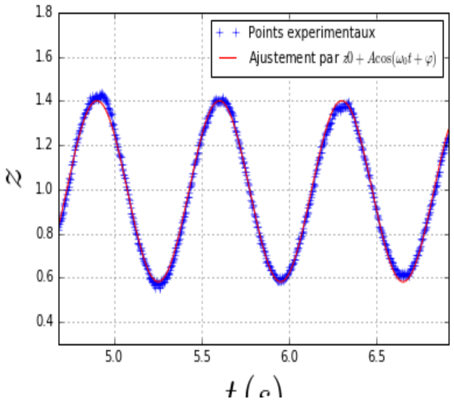


Oscillations harmoniques de la masse autour de sa position d'équilibre $z = z_{eq}$ avec
- une pulsation ω_0
- une amplitude d

2.6. Confrontation à l'expérience.



Sur un temps "long", l'amortissement de l'oscillateur n'est pas rendu compte par le modèle de l'oscillateur harmonique non amorti.



Sur un temps "court", les points expérimentaux sont qualitativement ajustés* par la solution $z(t) = z_0 + A\cos(\omega_0 t + \varphi)$ fourni par le modèle théorique.
Le modèle de l'oscillateur harmonique non amorti décrit correctement le système masse ressort sur une durée ~ qq secondes.

* Quantitativement, il faudrait comparer la fréquence f fournie par la modélisation à la valeur $\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$ prédite par le modèle (cf cours S11)

2.7. Energie

2.7.1. Energie cinétique

$$\boxed{E_c = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \dot{z}^2(t)}$$

avec $\dot{z}(t) = -d\omega_0 \sin(\omega_0 t)$

$$E_c = \frac{1}{2} m d^2 \omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t)$$

2.7.2. Energie potentielle

$$E_p = mgz + \frac{1}{2} k (l - l_0)^2$$

avec $l = z$

$$E_p = mgz + \frac{1}{2} k (z - l_0)^2$$

+ choix d'origine des énergies potentielles $E_p(z_{eq}) = 0$.

On admet (amusez vous !).

$$\boxed{E_p = \frac{1}{2} m \omega_0^2 (z - z_{eq})^2}$$

2.7.3. Énergie mécanique

$$E_m = E_c + E_p$$

$$\boxed{E_m = \frac{1}{2} m \dot{z}^2 + \frac{1}{2} m \omega_0^2 (z - z_{eq})^2.}$$

$z = z_{eq} + d\cos(\omega_0 t)$
$\dot{z} = -\omega_0 d \sin(\omega_0 t)$

On calcule E_m :

$$E_m = \frac{1}{2} m \omega_0^2 d^2 \sin^2(\omega_0 t) + \frac{1}{2} m \omega_0^2 d^2 \cos^2(\omega_0 t)$$

$$= \frac{1}{2} m \omega_0^2 d^2 \left(\sin^2(\omega_0 t) + \cos^2(\omega_0 t) \right)$$

$$E_m = \frac{1}{2} m \omega_0^2 d^2 = \frac{1}{2} k d^2 = \underline{\text{cste}}$$

↑ Ep élastique initiale