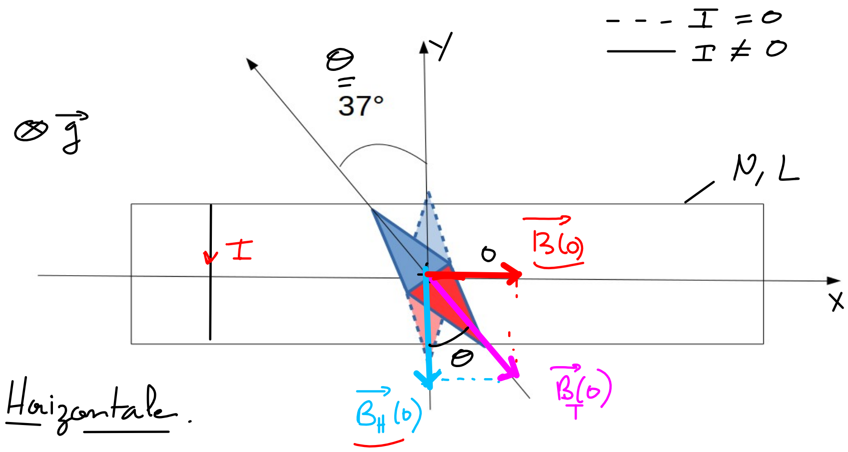
TD EM1 – Corrigé

EM1 – Champ magnétique terrestre



$B_H = ?$

– L'aiguille aimantée s'aligne sur le champ magnétique $\vec{B_T}(0)$.

– Si $i = 0$, $\vec{B} = \vec{B_H}(0)$.

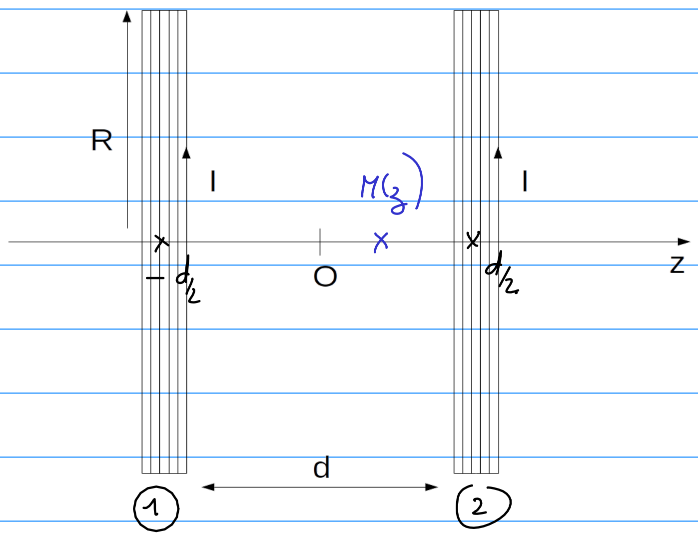
– Th de superposition : si $i \neq 0$, $\vec{B_T}(0) = \vec{B_H}(0) + \underbrace{\vec{B'}(0)}_{\text{champ du solénoïde}}$

– $B(0) = \mu_0 n I \vec{e_x}$

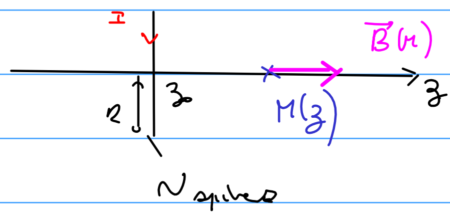
– $\tan\theta = \dfrac{B(0)}{B_H(0)} \Leftrightarrow B_H = \dfrac{B(0)}{\tan\theta} \Leftrightarrow \boxed{B_H = \dfrac{\mu_0 N/L\, I}{\tan\theta}}$

A.N. $B_H = 3,45 \times 10^{-5}$ T. O.G. : ok

EM2 – Bobines de Helmholtz



1/ $\vec{B} = \mu_0 \dfrac{N I R^2}{2(R^2 + (z-z_0)^2)^{3/2}} \vec{e_z}$



– Formule homogène.

– $z = z_0$ $\vec{B} = \mu_0 \dfrac{NI}{2R} \vec{e_z}$?

– $\|\vec{B}\| \searrow$ $|z - z_0|$: distance à la bobine $\nearrow$

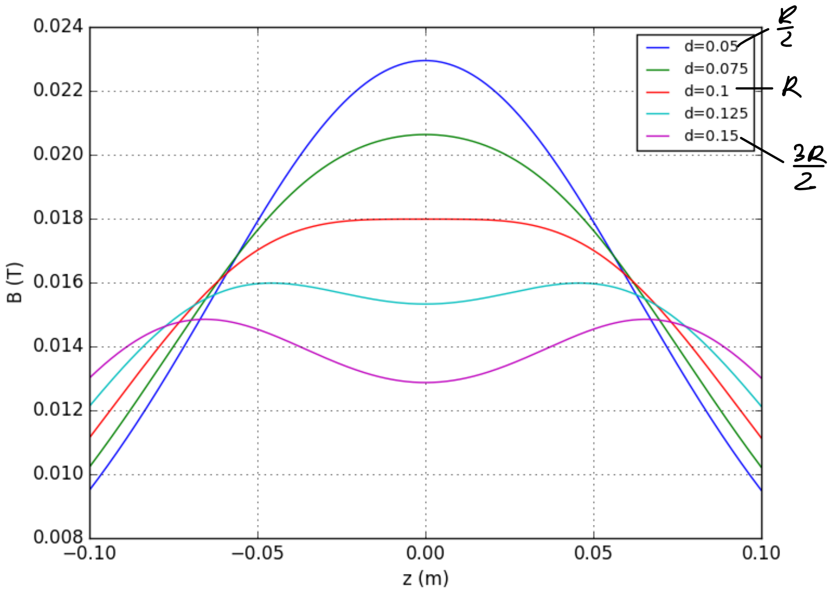
– $\|\vec{B}\| \propto I$

2/ $\vec{B}(z) = \vec{B_1}(z) + \vec{B_2}(z)$ avec $\vec{B_1}(z) = \mu_0 \dfrac{N I R^2}{2(R^2 + (z+\frac{d}{2})^2)^{3/2}} \vec{e_z}$

$$\vec{B_2}(z) = \mu_0 \frac{N I R^2}{2(R^2 + (z-\frac{d}{2})^2)^{3/2}} \vec{e_z}$$

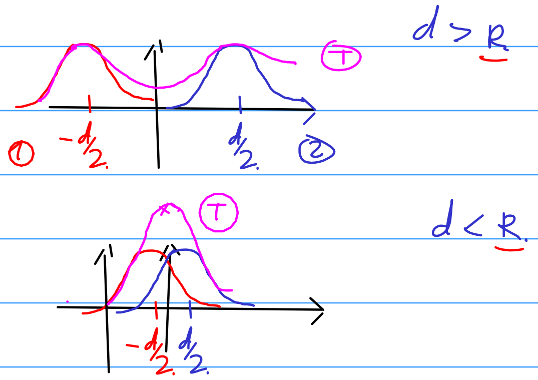
$$\boxed{\vec{B}(z) = \frac{\mu_0 N I R^2}{2} \left[\frac{1}{(R^2 + (z+\frac{d}{2})^2)^{3/2}} + \frac{1}{(R^2+(z-\frac{d}{2})^2)^{3/2}} \right] \vec{e_z}}$$

3/ $B(z)$, $\forall z \in [-2R, 2R]$, $d \in [\frac{R}{2}, \frac{3R}{2}]$. $R = 0{,}1$ m.



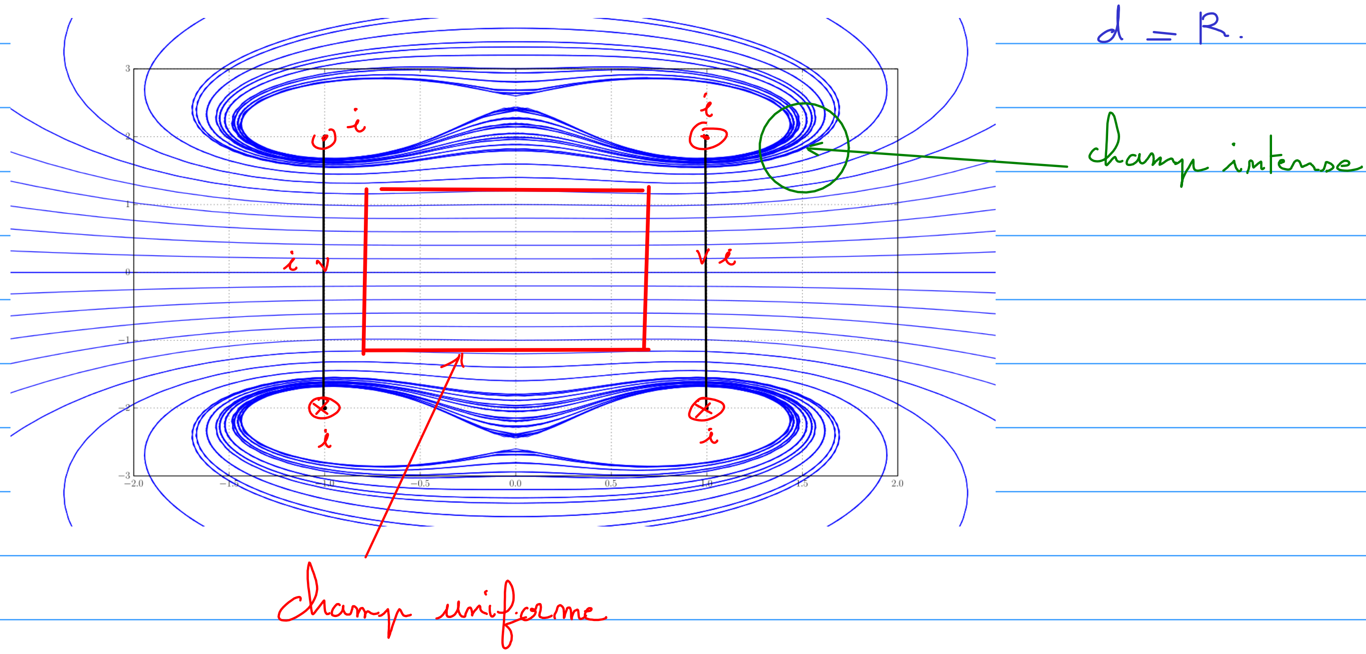
○ max local de $B(z)$ si $d < R$

○ min local de $B(z)$ si $d > R$.



– Si $d = R$, au voisinage de $z = 0$, $\vec{B}$ uniforme sur l'axe.

4/ 1/



4.2/ Si $d = R$, $B(z) = $ cste à $\left(\frac{z}{R}\right)^4$ près au voisinage de $z = 0$?

Naivement : DL de $B(0)$ à l'ordre 4 en z/R.

MAIS $B(z)$ est paire donc le terme d'ordre 3 est nul et on peut donc se contenter d'un développement limité à l'ordre 2 en z/R.

$$B_1(z) = \frac{\mu_0 N I R^2}{\left(R^2 + \left(z - \frac{R}{2}\right)^2\right)^{3/2}} = \frac{\mu_0 N I R^2}{R^3}\Bigg(\overbrace{1 + \left(\frac{z - R/2}{R}\right)^2}^{(1+\varepsilon)^\alpha}\Bigg)^{-3/2} = \frac{\mu_0 N I}{R}\left(1 + \frac{z^2}{R^2} - \frac{z}{R} + \frac{1}{4}\right)^{-3/2}$$

$$= \frac{\mu_0 N I}{R}\left(\frac{5}{4} + \frac{z^2}{R^2} - \frac{z}{R}\right)^{-3/2} = \underbrace{\left(\frac{4}{5}\right)^{-3/2}}_{\frac{5\sqrt{5}}{8}} \frac{\mu_0 N I}{R}\Big[1 \overbrace{- \frac{4}{5}\frac{z}{R} + \frac{4}{5}\frac{z^2}{R^2}}^{\varepsilon}\Big]^{-3/2}$$

$$(1+\varepsilon)^\alpha = 1 + \alpha\varepsilon + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2)$$

$$B_1(z) = \frac{5\sqrt{5}}{8}\frac{\mu_0 N I}{R}\left[1 - \frac{3}{2}\left(-\frac{4}{5}z/R + \frac{4}{5}z^2/R^2\right) + \frac{-\frac{3}{2}\times\left(-\frac{3}{2}-1\right)}{2}\left(-\frac{4}{5}z/R + \frac{4}{5}z^2/R^2\right)^2\right]$$

$$= \frac{5\sqrt{5}}{8}\frac{\mu_0 N I}{R}\left[1 + \frac{6}{5}z/R - \frac{6}{5}z^2/R^2 + \frac{15}{8}\times\left(\frac{16}{25}z^2/R^2 - \frac{16}{25}z^3/R^3 + \frac{16}{25}z^4/R^4\right)\right]$$

$$= \frac{5\sqrt{5}}{8}\frac{\mu_0 N I}{R}\left[1 + \frac{6}{5}z/R - \frac{6}{5}z^2/R + \frac{6}{5}z^2/R^2 - \frac{6}{5}z^3/R^3 + \frac{6}{5}z^4/R^4\right]$$

$$\boxed{B_1(z) = \frac{5\sqrt{5}}{8}\frac{\mu_0 N I}{R}\left[1 + \frac{6}{5}z/R + o(z^2/R^2)\right]}$$

$$B_2(z) = \frac{\mu_0 N I R^2}{\left(R^2 + \left(z + \frac{R}{2}\right)^2\right)^{3/2}} = \frac{\mu_0 N I R^2}{R^3}\left(1 + \left(\frac{z + R/2}{R}\right)^2\right)^{-3/2} = \frac{\mu_0 N I}{R}\left(1 + \frac{z^2}{R^2} + \frac{z}{R} + \frac{1}{4}\right)^{-3/2}$$

Calculs analogues à ceux relatifs à $B_1(z)$:

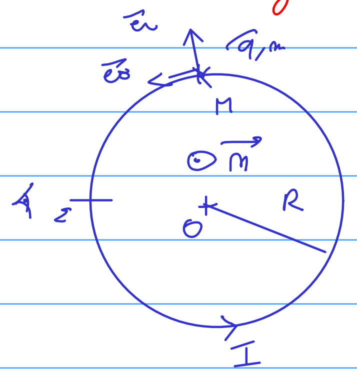
$$\boxed{B_2(z) = \frac{5\sqrt{5}}{8}\frac{\mu_0 N I}{R}\left[1 - \frac{6}{5}z/R + o(z^2/R^2)\right]}$$

$$B(z) = B_1(z) + B_2(z) \Leftrightarrow B(z) = \frac{5\sqrt{5}}{8}\frac{\mu_0 N I}{R}\left[1 + o(z^2/R^2)\right]$$

Or $B(z) = B(-z) \Rightarrow$ $\boxed{B(z) = \frac{5\sqrt{5}}{8}\frac{\mu_0 N I}{R}\left[1 + o(z^3/R^3)\right]}$

Le champ magnétique axial est uniforme au voisinage de $z=0$ est uniforme à l'ordre 3 en z/R au moins.

EM3 – Moment magnétique orbital



1/ $\boxed{I = \dfrac{q}{T}}$ moyenne.

2/ Moment magnétique $\vec{m}$?

$\vec{m} = I S \vec{n}$ avec $I = \dfrac{q}{T}$
$S = \pi R^2$

$\Rightarrow \boxed{\vec{m} = \dfrac{q \pi R^2}{T} \vec{n}}$

3/ Moment cinétique : $\vec{L}_O = \vec{OM} \wedge m\vec{v} = R\vec{e_r} \wedge m v \vec{e_\theta}$

$\Leftrightarrow \vec{L_O} = m R v \vec{e_z}$ avec $v = \dfrac{2\pi R}{T}$

$\Rightarrow \boxed{\vec{L_O} = m \dfrac{2\pi R^2}{T} \vec{n}}$

$\boxed{\vec{m} = \dfrac{q}{2m} \vec{L_O}}$

4/ Atome H : $L_O = \hbar \Rightarrow m = \boxed{\dfrac{e\hbar}{2m_e} = \mu_B}$

A.N. : $\hbar \sim 10^{-34}$ Js
$m_e \sim 10^{-30}$ kg
$e \sim 10^{-19}$ C

$\mu_B \sim \dfrac{10^{-34} \times 10^{-19}}{10^{-30}} = 10^{-23}$ Am².