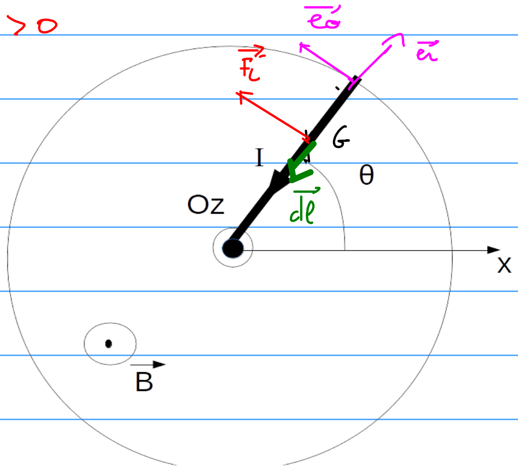
TD EM4 – Corrigé

EM1 – Barre conductrice dans un champ magnétique.

$I > 0$



1/ Moment des forces de Laplace.

$$\mathcal{M}_{Oz}(\vec{F_L}) = \vec{\mathcal{M}_O}(\vec{F_L}) \cdot \vec{e_z}$$

$$\vec{\mathcal{M}_O}(\vec{F_L}) = \vec{OG} \wedge \vec{F_L}$$

$$\vec{OG} = \frac{L}{2}\vec{e_r}$$

$$\vec{F_L} = \int_0^L I\vec{dl} \wedge \vec{B} \quad \text{avec } \vec{dl} = -dr\,\vec{e_r}$$

$$\vec{B} = B_0\vec{e_z}$$

$$\Rightarrow \vec{F_L} = \int_0^L -IB_0\,dr\,\underbrace{\vec{e_r} \wedge \vec{e_z}}_{-\vec{e_\theta}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{F_L} = IB_0L\,\vec{e_\theta}}$$

$$\vec{\mathcal{M}_O}(\vec{F_L}) = \frac{L}{2}\vec{e_r} \wedge IB_0L\,\vec{e_\theta} \Rightarrow \vec{\mathcal{M}_O}(\vec{F_L}) = IB_0\frac{L^2}{2}\vec{e_z} \Rightarrow \boxed{\mathcal{M}_{Oz}(\vec{F_L}) = \frac{IB_0L^2}{2}}$$

2/ Equat° du mvt de la barre = equa diff sur θ.

TMC : $\left.\frac{dL_{Oz}}{dt}\right|_{\mathcal{R}} = \sum \mathcal{M}_{Oz}$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt}(J\dot{\theta}) = -\lambda\dot{\theta} + \frac{IB_0L^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \frac{\lambda}{J}\dot{\theta} = \frac{IB_0L^2}{2J}}$$

3/ Vitesse angulaire : $\Omega = \dot{\theta}$ d'où : $\dot{\Omega} + \underbrace{\frac{\lambda}{J}}_{1/\tau}\Omega = \underbrace{\frac{IB_0L^2}{2J}}_{\frac{\Omega_\infty}{\tau}}$

À SAVOIR RESOUDRE !

$$\Rightarrow \boxed{\dot{\Omega} + \frac{\Omega}{\tau} = \frac{\Omega_\infty}{\tau}}$$

Solut° : $\boxed{\Omega(t) = Ae^{-t/\tau} + \Omega_\infty}$

régime libre.

régime établi = stationnaire

Régime transitoire dure qq τ, pour $t > qq\,\tau$:

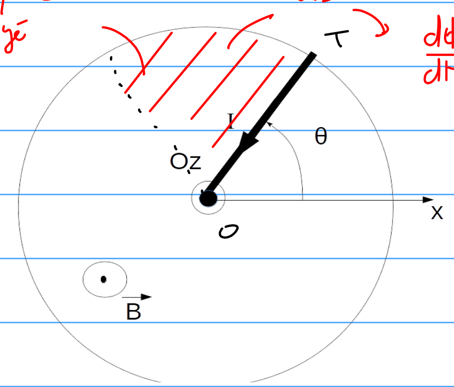
$\Omega \simeq \Omega_\infty = \dfrac{IB_0L^2}{2\tau} \times \tau = \dfrac{IB_0L^2}{2\lambda} = cste$ i.e. rotation uniforme de la barre.

4.1. f.e.m. induite e.

Loi de Faraday : $e(t) = -\dfrac{d\phi}{dt}$, ϕ : flux magnétique à travers le circuit.

Surface balayé

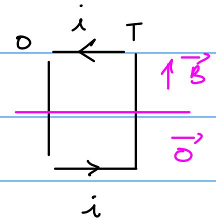
dS



$\dfrac{d\phi_c}{dt} = B_0 \times \dfrac{dS}{dt}$

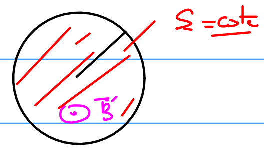
Ici $\phi = \underline{cste}$

$\Longrightarrow e(t) = 0$???



$\phi = \underline{cste}$

$\Longrightarrow e(t) = 0$??!



" rail de Laplace tournant "

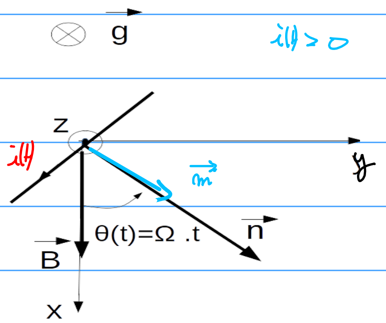
$\underline{\text{Rem}}$: $e(t) = -\dfrac{d\phi_c}{dt} \leftarrow$ flux coupé.

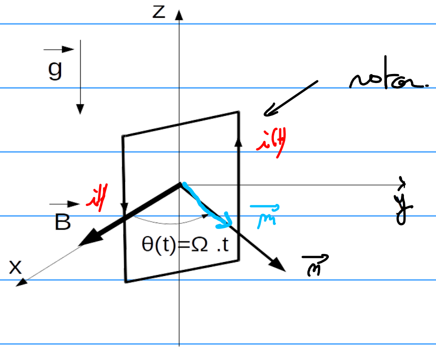
4. 2. $e(t) = ?$ $\Longrightarrow$ $\underbrace{eI}_{\text{puissance électrique reçue}} + \underbrace{\Gamma \times \Omega}_{\text{puissance mécanique reçue}} = 0$ Voir cours $\underline{\text{EM3}}$

En régime établi : $e = -\dfrac{\Gamma\,\Omega_\infty}{I} \iff e = \dfrac{\cancel{I}B_0L^2}{2\cancel{I}} \times \dfrac{IB_0L^2}{2\lambda}$

$\iff e = \dfrac{I\,B_0^2\,L^4}{4\lambda}$

EM2 - Principe de l'alternateur.





1/ Moment magnétique du rotor : $\boxed{\vec{m} = i(t) N a^2 \vec{n}}$

2/ Analyse qualitative :

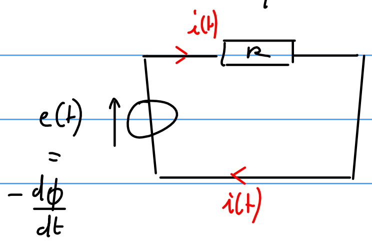
1. Rotor tourne. cause
2. $\Rightarrow$ ϕ_B varie au cours du temps
3. $\Rightarrow$ f.e.m induite $e(t)$
4. $\Rightarrow$ courant induit $i(t)$

principe de l'alternateur. (centrale)

5. $\Rightarrow$ moment induit $\vec{m} = i(t)\, a^2 \vec{n}$
6. $\Rightarrow$ le rotor subit le moment $\vec{\Gamma} = \vec{m} \wedge \vec{B}$ effet
7. $\Rightarrow$ d'après de Lenz, le moment $\vec{\Gamma}$ est résistant.

3/ Courant $i(t)$ traversant le rotor.

Schéma équivalent au rotor :



$$i(t) = \frac{e(t)}{R}$$

avec $e(t) = -\dfrac{d\phi}{dt}$

avec $\phi = \iint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot \vec{dS} = \iint_{\mathcal{C}} B_0 \vec{e_x} \cdot dS\, \vec{n} = B_0\, \vec{e_x} \cdot \vec{n} \underbrace{\iint_{\mathcal{C}} dS}_{Na^2} = Na^2 B_0 \underbrace{\vec{e_x} \cdot \vec{n}}_{\cos(\Omega t)}$

$\Rightarrow$ $\boxed{\phi = Na^2 B_0 \cos(\Omega t)}$ $\Rightarrow$ $\boxed{e(t) = Na^2 B_0 \Omega \sin(\Omega t)}$

$\Rightarrow$ $\boxed{i(t) = \dfrac{Na^2 B_0 \Omega \sin(\Omega t)}{R}}$

4/ $\vec{\Gamma} = \vec{m} \wedge \vec{B}$ avec $\vec{m} = Na^2 i(t)\, \vec{n}$

$\vec{B} = B_0 \vec{e_x}$

$$\vec{\Gamma} = Na^2 i(t) B_0\, \vec{m} \wedge \vec{e_x} = -Na^2 B_0\, i(t) \sin(\Omega t)\, \vec{e_z}$$

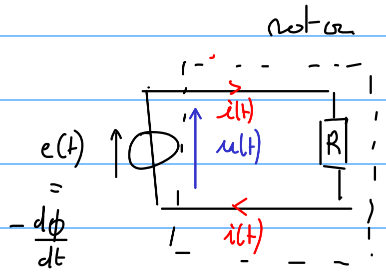
$$\boxed{\vec{\Gamma} = -\frac{(Na^2 B_0)^2 \Omega}{R} \sin^2(\Omega t)\, \vec{e_z}}$$

$\Gamma_z = \vec{\Gamma}\cdot\vec{e_z} < 0$ résistance conforme à la loi de Lenz.

5/ Puissance électrique reçue par le rotor.

$$P_e = u(t)\, i(t) = R i^2(t)$$

$$\Rightarrow \boxed{P_e = \frac{(Na^2 B_0)^2 \Omega^2 \sin^2(\Omega t)}{R}}$$

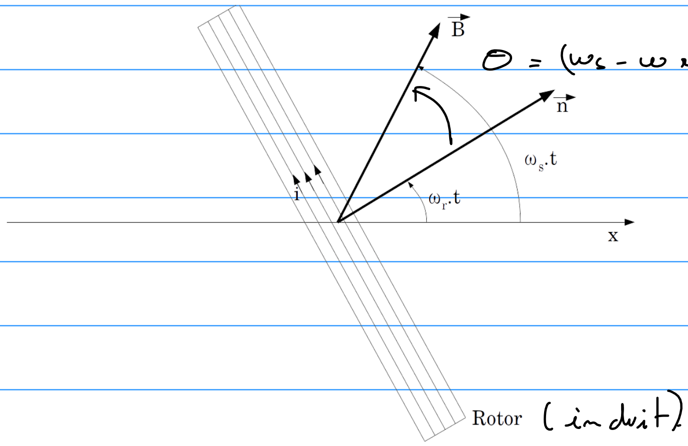


Origine de P_e ?

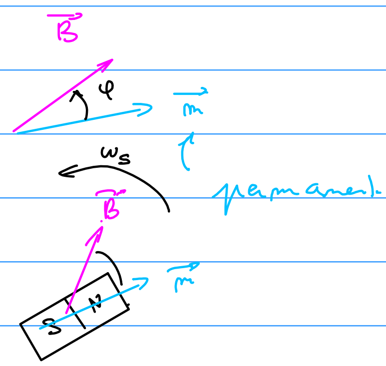
Puissance mécanique fournie au rotor :

$$P_m = \vec{\Gamma}\cdot\vec{\Omega} = \Gamma_z \Omega = -\frac{(Na^2 B_0)^2 \Omega^2}{R}\sin^2(\Omega t) = -P_e \quad \text{cqfd}$$

EM3 - Principe du moteur asynchrone

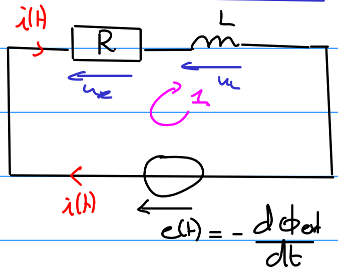


Moteur synchrone.



1/ Origine du moment magnétique du rotor : courant induit par la rotation du champ magnétique.

2/ Modélisat° du rotor.



$i(t)$?

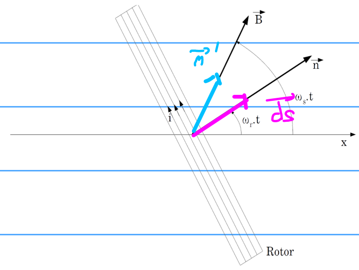
$e(t) = u_R + u_L \qquad u_R = Ri$

$u_L = L\dfrac{di}{dt}$

$$\boxed{\frac{di}{dt} + \frac{i(t)}{\tau} = \frac{e(t)}{L}} \quad , \quad \boxed{\tau = \frac{L}{R}}$$

Régime établi $\Rightarrow$ solution particulière de l'équation.

Nature du régime établi $\Leftarrow$ 2^d membre de l'équation.



$e(t) = -\dfrac{d\phi_{ext}}{dt}$ avec $\phi = \iint_e \vec{B}.\vec{dS}$ avec $\vec{dS} = dS\,\vec{m}$

$\vec{B} = B_0\,\vec{m}'$

$\Leftrightarrow \quad \phi = B_0\,\vec{m}'.\vec{m}\iint_e dS$

$\Leftrightarrow \quad \phi = B_0 \cos\theta\ NS \qquad \theta = (\omega_s - \omega_r)t = \omega_g t$.

$\Leftrightarrow \quad \phi = \phi_0 \cos(\omega_g t)$

$$\boxed{e(t) = +\phi_0\,\omega_g \sin(\omega_g t)}$$

$$\frac{di}{dt} + \frac{i}{\tau} = \underbrace{\frac{\phi_0\,\omega_g}{L}\,\overset{\cos(\omega_g t - \frac{\pi}{2})}{\sin(\omega_g t)}}_{\text{harmonique.}} \qquad + \text{ syst linéaire.}$$

Sol particulière : $i(t) = \underline{I_m}\cos(\omega_g t + \underline{\varphi}) \rightarrow \underline{i}(t) = \underline{I_m}\,e^{j\omega_g t}$, $\underline{I_m} = I_m e^{j\varphi}$

$\underline{I_m}$?

$$\frac{d\underline{i}}{dt} + \frac{\underline{i}}{\tau} = \frac{\phi_0\,\omega_g}{L}e^{j(\omega_g t - \frac{\pi}{2})} \Leftrightarrow \left(j\omega_g + \frac{1}{\tau}\right)\underbrace{\underline{i}}_{\underline{I_m}e^{j\omega_g t}} = \frac{\phi_0\,\omega_g}{L}e^{j(\omega_g t - \frac{\pi}{2})}$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\underline{I_m} = \frac{\phi_0\,\omega_g/L}{\frac{1}{\tau} + j\omega_g}\,e^{-j\frac{\pi}{2}}}$$

$$I_m = |\underline{I_m}| = \boxed{\frac{\phi_0\,\omega_g/L}{\sqrt{\frac{1}{\tau^2} + \omega_g^2}} = I_m.} \qquad \boxed{\varphi = \arg(\underline{I_m}) = -\frac{\pi}{2} - \underbrace{\arctan(\omega_g \tau)}_{\varphi}}$$

1 filtrage...

4/ Couple subi par le rotor :

$\vec{\Gamma} = \vec{m} \wedge \vec{B}$ avec $\vec{B} = B_0 \vec{m}'$

$\vec{m} = i(t)\, N S\, \vec{n}$

$\Rightarrow \vec{\Gamma} = \underbrace{NSB_0}_{\Phi_0}\, i(t)\, \underbrace{\vec{m} \wedge \vec{m}'}_{\sin(\omega_g t)\,\vec{e_z}}$ et $i(t) = I_m \cos(\omega_g t - \frac{\pi}{2} - \varphi) = I_m \sin(\omega_g t - \varphi)$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\Gamma} = \frac{\Phi_0^2\, \omega_g / L}{\sqrt{1/\tau^2 + \omega_g^2}} \sin(\omega_g t) \sin(\omega_g t - \varphi)\, \vec{e_z}}$$

$$\langle \vec{\Gamma} \rangle = \frac{1}{T_g} \int_0^{T_g} \vec{\Gamma}\, dt = \frac{\Phi_0^2\, \omega_g / L}{T_g \sqrt{1/\tau^2 + \omega_g^2}} \int_0^{T_g} \underbrace{\sin(\omega_g t) \sin(\omega_g t - \varphi)}_{\frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b))}\, dt$$

$a = \omega_g t$ et $b = \omega_g t - \varphi$.

$$\langle \vec{\Gamma} \rangle = \frac{\Phi_0^2\, \omega_g / L}{2 T_g \sqrt{1/\tau^2 + \omega_g^2}} \left(\underbrace{\int_0^{T_g} \cos\varphi\, dt}_{\cos\varphi \times T_g} - \underbrace{\int_0^{T_g} \cos(2\omega_g t - \varphi)\, dt}_{0} \right)$$

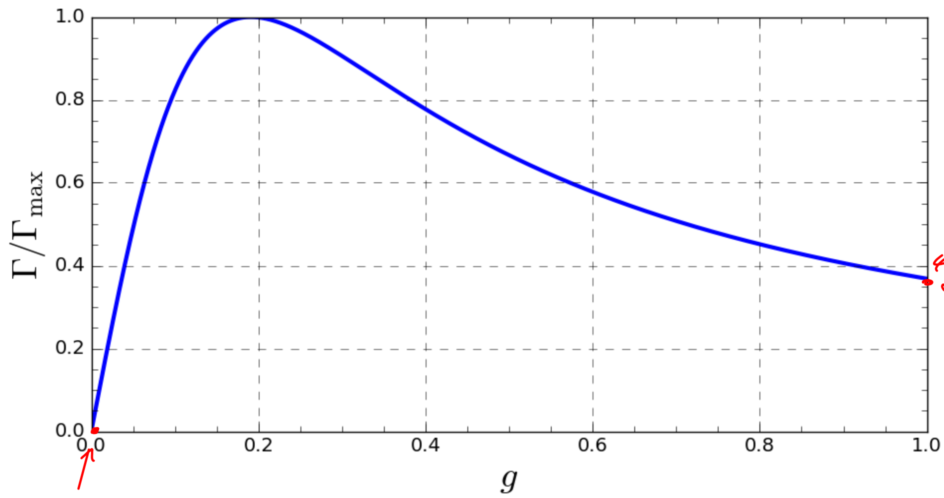
période $T_g/2$

$$\Rightarrow \boxed{\langle \vec{\Gamma} \rangle = \frac{\Phi_0^2\, \omega_g / L}{2\sqrt{1/\tau^2 + \omega_g^2}} \cos\varphi\, \vec{e_z}}$$

$\omega_g = f(\omega_s)$

$g = \frac{\omega_g}{\omega_s} \Rightarrow \omega_g = g\,\omega_s$

4/



$g = \frac{\omega_g}{\omega_s}$

couple de démarrage

$g = 1$, $\omega_r = 0$ (rotor immobile)

$g = 0 \Leftrightarrow \omega_g = 0$

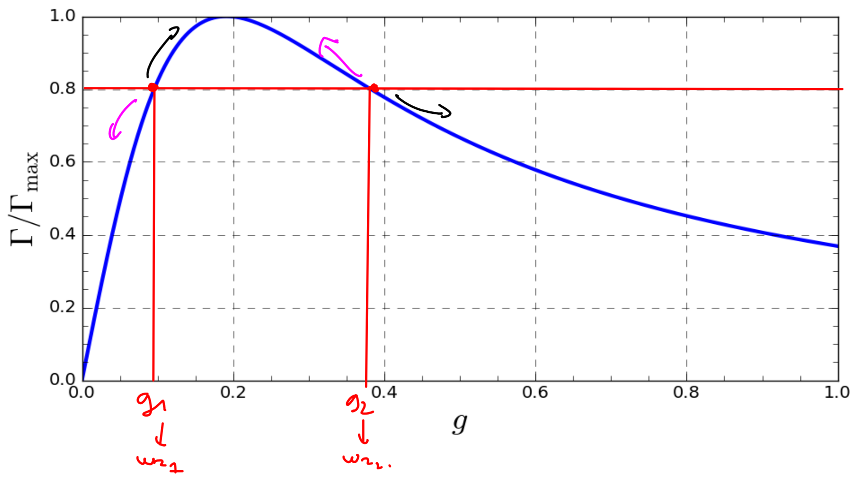
$\Leftrightarrow \omega_r = \omega_s$

4.1/ Couple résistant Γ_r. $\omega_r = ?$

Régime établi $\Rightarrow$ $\omega_r = cste$ $\Rightarrow$ $\omega_g = \underline{cste}$

TMC : $J\dot{\omega}_r = \Gamma_m - \Gamma_r = 0$

$\boxed{\Gamma_m = \Gamma_r}$ $\qquad \Gamma_r < Max(\Gamma_m)$



← Moteur ralentit

$\omega_r \searrow \Rightarrow g \nearrow$

← Moteur accélère.

$\omega_r \nearrow \Rightarrow g \searrow$

4.2/ Moteur asynchrone : $g \neq 0 \Leftrightarrow \omega_r \neq \omega_s$

4.3/ Stabilité :

$\omega_r = \omega_{r1}$. $\omega_r \searrow \Rightarrow \Gamma \nearrow$ STABLE

$\omega_r \nearrow \Rightarrow \Gamma \searrow$

$\omega_r = \omega_{r2}$. $\omega_r \searrow \Rightarrow \Gamma \searrow$ INSTABLE

$\omega_r \nearrow \Rightarrow \Gamma \nearrow$