TD M1 – Cinématique

D.Malka – MPSI 2018-2019 – Lycée Jeanne d'Albret

M1 – Cardioïde

On considère un point mobile M se déplaçant le long d'une courbe d'équation polaire $r(\theta) = a(1 + \cos\theta)$ appelée cardioïde.

1. En plaçant les points correspondant à $\theta = 0$, $\theta = \frac{\pi}{3}$, $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\theta = \frac{2\pi}{3}$ $\theta = \pi$, $\theta = \frac{4\pi}{3}$ ... $\theta = 2\pi$ dans le plan Oxy, représenter la cardioïde. On choisira Ox comme axe polaire. On pourra vérifier l'allure de la trajectoire en la traçant sous Python ou à la calculatrice graphique.
2. En un point P quelconque de la cardioïde, représenter θ, r ainsi que les vecteurs de bases $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_\theta$.
3. La cardioïde est parcourue à la vitesse angulaire $\dot{\theta} = \omega$, constante. A $t = 0$, $\theta(0) = 0$.

   3.1 Déterminer la vitesse du point M dans la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$.

   3.2 Représenter la vitesse $\vec{v}(M)$ du point M lorsqu'il se situe au point P de la cardioïde.

   3.3 En quel point de la trajectoire la valeur v de la vitesse de M est-elle maximale ?

M2 – Mouvement hélicoïdal

On considère un point M dont les coordonnées au cours du temps sont, dans le repère $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ attachée à un référentiel $\mathcal{R}$:

$$\begin{cases} x(t) = R.cos(\omega t) \\ y(t) = R.sin(\omega t) \\ z(t) = a.t \end{cases}$$

avec R, a et ω des constantes positives.

1. Donner les coordonnées cylindriques de M.
2. La trajectoire de M dans le référentiel $\mathcal{R}$ est une hélice. On la représente fig.1.

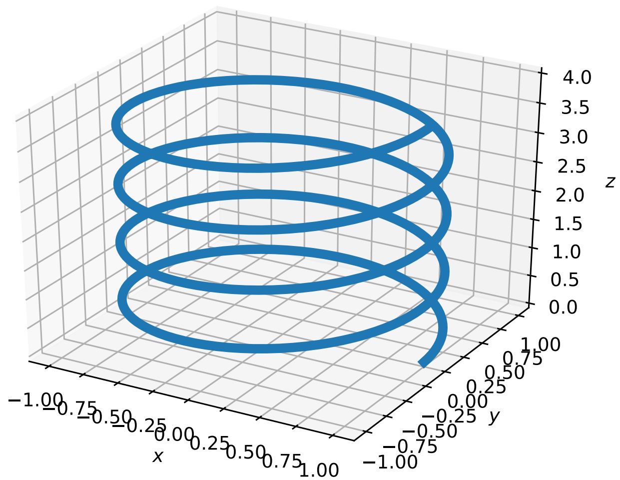


FIGURE 1 – Trajectoire hélicoïdale

   2.1 Exprimer le pas p de l'hélice en fonction des données.

   2.2 Exprimer puis représenter l'accélération de M dans le référentiel $\mathcal{R}$.

M3 – Mouvement cycloïdal

On considère le mouvement d'un cylindre sur un plan horizontal. La projection du centre de masse sur une des faces latérales du cylindre est repérée par un point noir noté N. Le point rouge, noté R, est extérieur à l'axe de rotation. La distance NR vaut $13 \pm 1\,\text{mm}$.

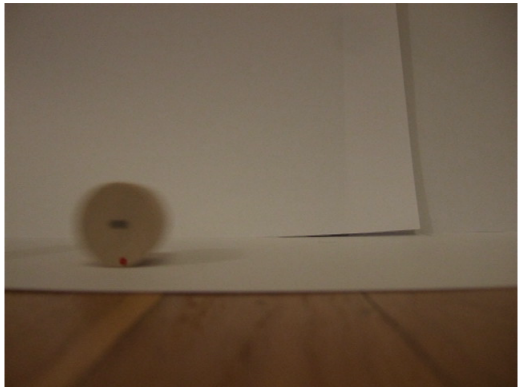


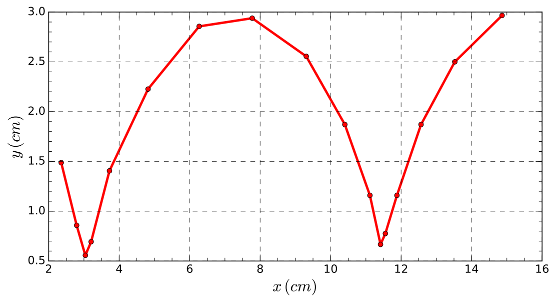
FIGURE 2 – Mouvement du cylindre. `http://www.david-malka-mpsi.fr/static/mpsi_website/media/mouvement_cylindre.mp4`

Une étude expérimentale de la vidéo donne les courbes fig.3.

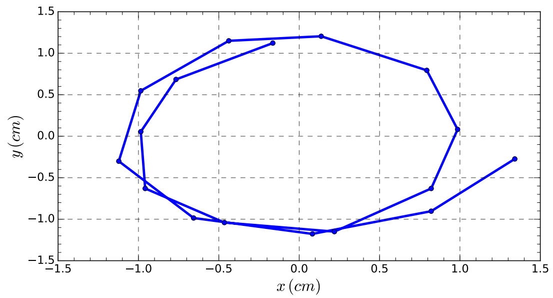
1. Pour chaque courbe, identifier le point étudié et le référentiel d'étude.
2. Si le cylindre roule sans glisser alors $v_N = R\omega$ où ω est la vitesse angulaire du cylindre par rapport à son axe, v_N la vitesse de son centre dans le référentiel terrestre et R son rayon. La condition de roulement dans glissement est-elle vérifiée ici ?

M4 – Rotation propre de la Terre

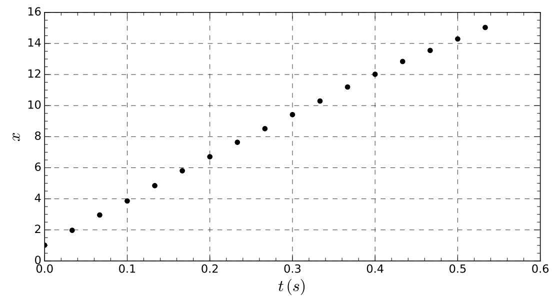
On considère le mouvement de rotation propre de la Terre autour de son axe Δ. Ce mouvement est uniforme et sa période J est appelée jour sidéral. La latitude de Saint Germain en Laye vaut $\lambda = 48\,^\circ 53\,'59\,''$N. Estimer la vitesse de la classe de MPSI (salle 433 !) ce jour dans le référentiel géocentrique.



(a)



(b)



(c)

FIGURE 3 – Fréquence d'acquisition des positions : 30 Hz.

M5 – Distance de sécurité

Deux voitures, distantes de $d = 80\,\mathrm{m}$, se suivent en roulant à la vitesse $v = 130\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$. A $t_0 = 0\,\mathrm{s}$, la voiture A_1 de tête freine avec une décélération $a = -10{,}0\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$. La voiture qui suit A_2 freine à $t_1 = 3\,\mathrm{s}$ (le conducteur regardait son téléphone !) avec une décélération $b = -15{,}0\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

1. Déterminer les équations horaires $x_1(t)$ et $x_2(t)$ des voitures pour différents intervalles de temps qu'on explicitera.
2. Y-a-t-il collision entre les deux voitures ? Si oui, déterminer l'instant τ, le lieu x_0 du choc et la vitesse relative v_{rel} du choc.

M6 – Un maître et son chien

Un promeneur marche à vitesse constante v_0 le long d'un chemin rectiligne. Son chien avance à la même vitesse mais sur une trajectoire parallèle distante de d, perpendiculairement à son maître. A $t = 0$, le chien change de direction et de vitesse pour rejoindre son maître. Pour cela, il adapte sa trajectoire de façon à se diriger, à tout instant, dans la direction de son maître. On note $\vec{v}$ sa vitesse de norme v **constante**. On pose $r = PM$ avec P la position du maître et M celle du chien (fig.4).

On cherche à répondre aux questions suivantes : quelle est la trajectoire du chien ? Au bout de combien de temps le chien rattrape-t-il son maître ?

1. Exprimer la vitesse $\vec{v}$ du chien dans le référentiel terrestre en fonction de v et $\vec{e}_r$.
2. Exprimer, dans la base polaire $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ et dans le référentiel du maître, la vitesse $\vec{v'} = \dfrac{d\overrightarrow{PM}}{dt}$ du chien en fonction de r, θ et leurs dérivées.
3. Exprimer dans la base polaire $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ et dans le référentiel terrestre, le vecteur-vitesse $\vec{v} = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$ du chien en fonction de r, θ, v_0 et leurs dérivées.
4. Déduire des questions précédentes deux équations différentielles couplées portant sur $r(t)$ et $\theta(t)$
5. En admettant que $\frac{dr}{d\theta} = \frac{\dot{r}}{\dot{\theta}}$, déduire de la question précédente une équation différentielle en $r(\theta)$.
6. Vérifier que la fonction ci-dessous est une solution de l'équation précédente respectant les conditions initiales du problème.

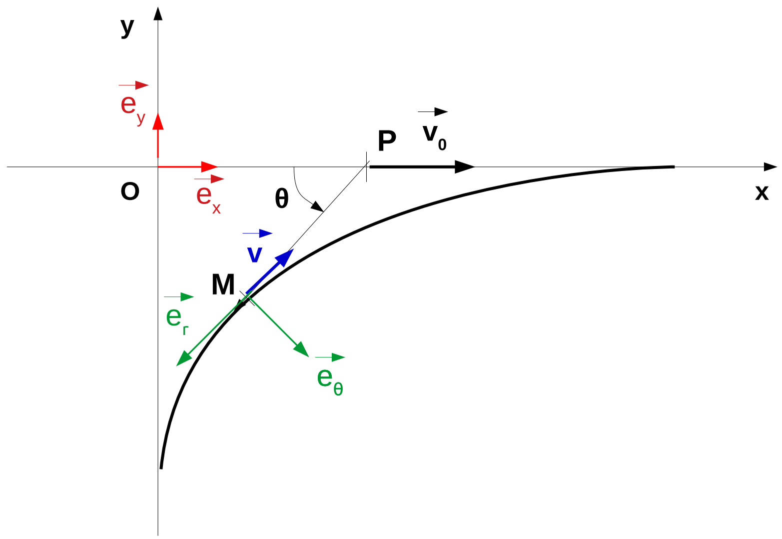


FIGURE 4 – Le chier rejoint son maître

$$r(\theta) = \frac{d}{\sin(\theta)}\left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^{\dfrac{v}{v_0}}$$

7. Quelle condition doivent vérifier v et v_0 pour que le problème admettent une solution ? En déduire la valeur finale de θ.
8. Écrire l'équation différentielle vérifiée par $\dot{\theta}$.
9. Exprimer la durée τ mise par le chien pour rejoindre son maître sachant que :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin^2(\theta)}\left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^\lambda d\theta = \frac{\lambda}{\lambda^2 - 1}$$

Commenter.