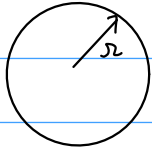


M2 - Ascension des bulles de champagne.

1. Masse m d'une bulle de champagne. $\text{CO}_2 \equiv \text{G.P.}$, $m = n M_{\text{CO}_2}$ Equation d'état du gaz parfait: $PV = nRT$

$$\Rightarrow m = \frac{PV}{RT} \Rightarrow m = \frac{PV}{M_{\text{CO}_2} RT}$$

On suppose les bulles sphériques d'où: $V = \frac{4}{3} \pi r^3$.

Finalement:
$$m = \frac{4 \pi P r^3}{3 M_{\text{CO}_2} RT}$$

A.N.: $P = 1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$

$r = 2 \times 10^{-4} \text{ m}$

$M_{\text{CO}_2} = 2M_{\text{O}} + M_{\text{C}} = 2 \times 16 + 12 = 44 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1} = 44 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$

$T = 283 \text{ K}$ (Champagne frais!)

$R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$

$m \approx 3,24 \times 10^{-8} \text{ kg} = 32,4 \mu\text{g}$

Ordre de grandeur cohérent.

A.N.: $\rho \approx 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ (le champagne est constitué essentiellement d'eau)

$r \approx 200 \mu\text{m} = 2 \times 10^{-4} \text{ m}$

$\Rightarrow m \approx 3 \times 10^{-8} \text{ kg} \approx 30 \mu\text{g}$ (O.G. cohérent)

2. Equation différentielle vérifiée par la bulle de champagne.

Syst: bulle de champagne.

Ref: 3 flûtes, galiléen

IDF: - poids: $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{e}_z$

- poussée d'Archimède: $\vec{\Pi} = +\rho_d V \vec{g} = \rho_d V g \vec{e}_z$

- force de Stokes: $\vec{f} = -\lambda \vec{v} = -\lambda \dot{z} \vec{e}_z$, $\lambda = 6\pi\eta r$ avec $\eta = 1,3 \times 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$

Base de travail: $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ TRC appliqué à la bulle dans \mathcal{D} :

$$m \vec{a}(t) = \vec{P} + \vec{\Pi} + \vec{f} \quad \text{avec} \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix}$$

On suppose le mouvement rectiligne suivant \vec{e}_z .

En projection sur \vec{e}_z : $m \ddot{z} = -mg + \rho_d V g - \lambda \dot{z}$

Comparons le poids et la poussée d'Archimède:

$$\frac{\|\vec{P}\|}{\|\vec{\Pi}\|} = \frac{mg}{\rho_d V g} = \frac{\rho_{\text{CO}_2} V}{\rho_d V} = \frac{\rho_{\text{CO}_2}}{\rho_d} \sim 10^{-3} \Rightarrow \text{on peut négliger le poids devant la poussée d'Archimède.}$$

D'où:

$$m \ddot{z} = \rho_d V g - \lambda \dot{z}$$

3. Forme canonique : $\ddot{z} + \frac{\lambda}{m} \dot{z} = \frac{\rho_{ch} V}{m} g$

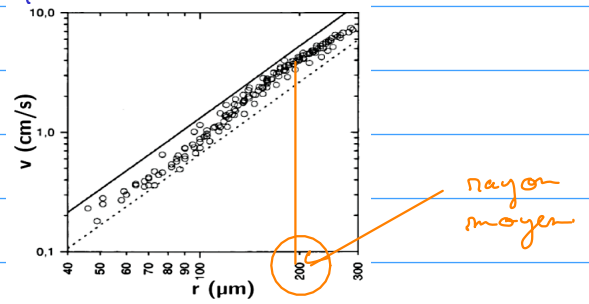
\swarrow $L.T^{-2}$ \rightarrow \swarrow T^{-1} \leftarrow \swarrow $L.T^{-1}$

On pose $\tau = \frac{m}{\lambda} = \frac{m}{6\pi\eta r}$ temps caractéristique du régime transitoire.

voir fig. 2.

A.N. : $r \sim 200 \mu\text{m} = 2 \times 10^{-4} \text{m}$
 $\eta = 1,3 \times 10^{-3} \text{Pa}\cdot\text{s}^{-1}$
 $m = 3,24 \times 10^{-8} \text{kg}$

} $\tau \sim 10 \text{ms}$



Or, l'expérience montre que la durée Δt d'ascension est $\sim 99 \mu\text{s} \Rightarrow \tau$.

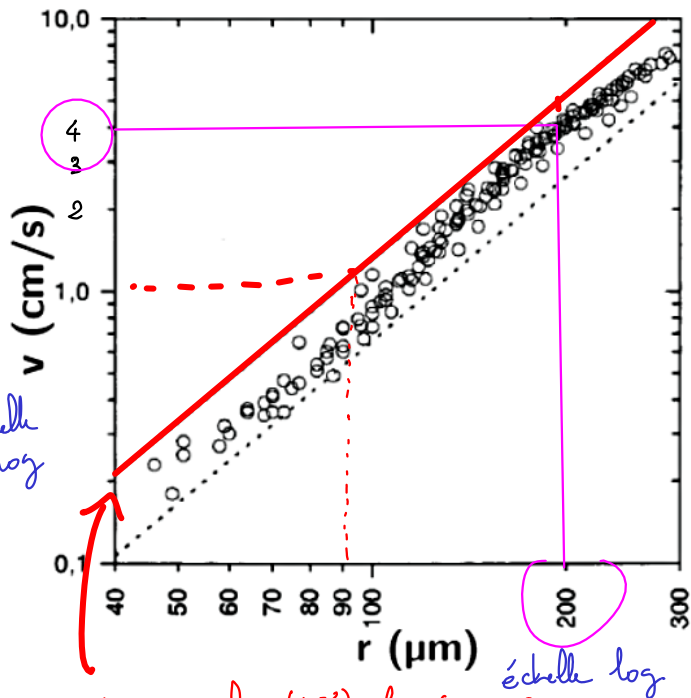
Donc l'ascension se fait essentiellement en régime établi à la vitesse ob.

Eq : $\dot{z} = v_{lim} \Rightarrow \ddot{z} = 0$ et donc $\frac{v_{lim}}{\tau} = \frac{\rho_{ch} V}{m} g$

$\Rightarrow v_{lim} = \frac{\rho_{ch} V \tau g}{m} = \frac{\rho_{ch} \times \frac{4}{3} \pi r^3 \times \cancel{m}}{6\pi\eta r} = \frac{2 \rho_{ch} g r^2}{9 \eta}$

$\Leftrightarrow v_{lim} = \frac{2 \rho_{ch} g r^2}{9 \eta}$

4. Discussion



Ordre de grandeur de σ_{lim} :

$$\rho_{ch} \sim 10^3 \text{ kg} \cdot \text{L}^{-1}$$

$$\eta = 1,3 \times 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$r_L = 2 \times 10^{-4} \text{ m}$$

$$g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

$$\sigma_{lim} \sim 6,7 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$$

le modèle surestime un peu la vitesse mais bon ordre de grandeur.

Peut éventuellement s'expliquer par des incertitudes sur ρ et η ...

Evolution de σ avec r

$$\sigma = \frac{2}{9} \frac{\rho_{ch} g r^2}{\eta}$$

Soit en échelle log pour comparer avec les données expérimentales:

$$\log \sigma = \log \left(\frac{2}{9} \frac{\rho_{ch} g}{\eta} r^2 \right)$$

$$\Leftrightarrow \log \sigma = \underbrace{\log \left(\frac{2}{9} \frac{\rho_{ch} g}{\eta} \right)}_K + 2 \log r$$

ceci
K

↑
pente
a=2.

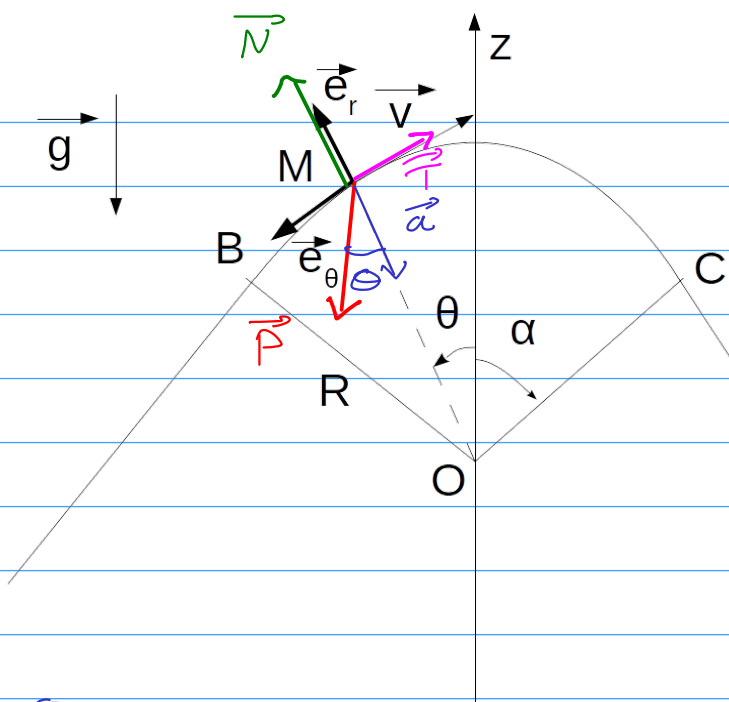
le modèle est cohérent avec les données expérimentales.

$$\text{pente } a = \frac{\log(10^{-2}) - \log(2 \times 10^{-3})}{\log(40 \times 10^{-6}) - \log(200 \times 10^{-6})}$$

$$= \frac{\log(5)}{\log(1/4)} \approx 2$$

Soit $a \approx 2$

113 - Saut d'une voiture



1/ Analyse dimensionnelle

$$[v_c] = L \cdot T^{-1}$$

Paramètres dont v_c dépend :

- m : $[m] = M$

- g : $[g] = L \cdot T^{-2}$

- α : $[\alpha] = \phi$

- R : $[R] = L$

$$[gR] = L^2 T^{-2}$$

$$\Rightarrow [\sqrt{gR}] = L \cdot T^{-1}$$

On propose

$$v_c = \sqrt{gR}$$

+ c'est car $v_c \propto \sqrt{g} \propto R$

$$R=0$$

$$\Rightarrow v_c=0$$

$$R \rightarrow +\infty$$

$$v_c \rightarrow +\infty$$

2. Condition de décollage de la voiture :

$$\|\vec{N}\| = 0$$

2.1/ $\vec{T} = T\vec{e}_\theta$ avec $T < 0$ car doit compenser la composante tangentielle du poids.

2.2/ Syst : M (m)

Ref : terrestre, galiléen

Inventaire des forces : base de travail $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$

- poids : $\vec{P} = m\vec{g} = \begin{pmatrix} -mg \cos \theta \\ +mg \sin \theta \end{pmatrix}$

- réact° normale : $\vec{N} = \begin{pmatrix} N \\ 0 \end{pmatrix}$

- réact° tangentielle : $\vec{T} = \begin{pmatrix} 0 \\ T \end{pmatrix}$

RFD appliqué à $M(m)$ dans \mathcal{R} galiléen :

$$m \vec{a}(m) = \vec{P} + \vec{T} + \vec{N}$$

Projection sur $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$

$$\begin{pmatrix} \cancel{\ddot{r}} - \frac{r\dot{\theta}^2}{r} \\ r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \end{pmatrix}$$

$$r = R = \text{cte.}$$

$$\begin{cases} -mR\dot{\theta}^2 = -mg \cos \theta + N & (1) \\ mR\ddot{\theta} = mg \sin \theta + T & (2) \end{cases}$$

2.3. $\Pi_g \vec{a} \cdot \vec{a} = -\frac{v^2}{R}$

$\vec{a} \cdot \vec{e}_r = -R\dot{\theta}^2$. Il faut $\dot{\theta} = f(\theta)$

$$\vec{v} = \cancel{\dot{r}} \vec{e}_r + \frac{r\dot{\theta}}{r} \vec{e}_\theta = R\dot{\theta} \vec{e}_\theta$$

D'où $v = \|\vec{v}\| = R|\dot{\theta}|$

$$\Rightarrow \dot{\theta}^2 = \frac{v^2}{R^2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{a} \cdot \vec{e}_r = -\frac{v^2}{R} \\ \dot{\theta} = \text{cte} \Rightarrow \ddot{\theta} = 0 \end{cases}$$

2.4. D'où les équations du mouvement :

$$\begin{cases} -m\frac{v^2}{R} = -mg \cos \theta + N & (1) \\ 0 = mg \sin \theta + T & (2) \end{cases}$$

(2) : T compense la composante tangentielle du poids. $\Rightarrow v = \text{cte}$

Condition d'adhérence de la voiture, $N > 0$.

or (1) : $N = mg \cos \theta - m\frac{v^2}{R}$

d'où ..

$$N > 0 \Leftrightarrow mg \cos \theta - \frac{v^2}{R} > 0$$

$$\Leftrightarrow v < \sqrt{gR \cos \theta} \quad \text{condition d'adhérence en } \theta$$

Condition de détachement en θ :

$$\sigma \geq \sqrt{gR \cos \theta}$$

3. Supposons que $\sigma \geq \sqrt{gR \cos \theta}$.
 alors avec $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ et $\alpha > \theta$
 alors $\cos \alpha < \cos \theta$

$$\Rightarrow \sqrt{gR \cos \theta} > \sqrt{gR \cos \alpha}$$

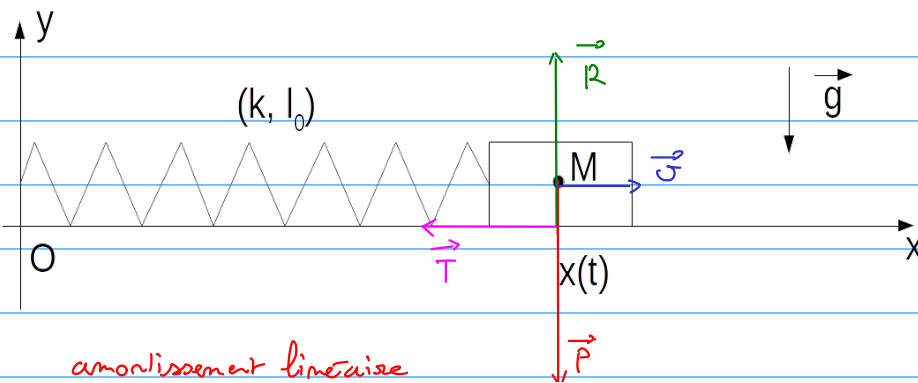
donc la vitesse de collage en $\theta = \alpha$ (au B)
 vaut !

Donc la condition de détachement est

$$\sigma > \sigma_c$$

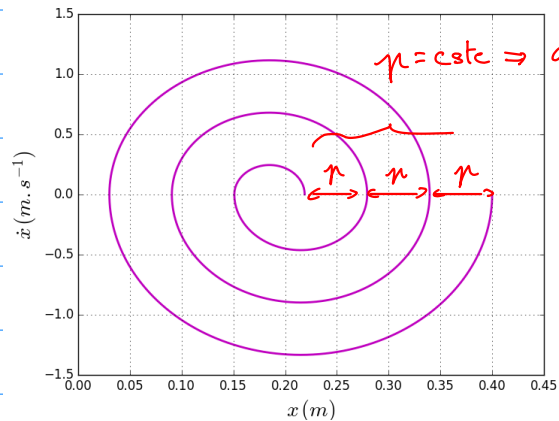
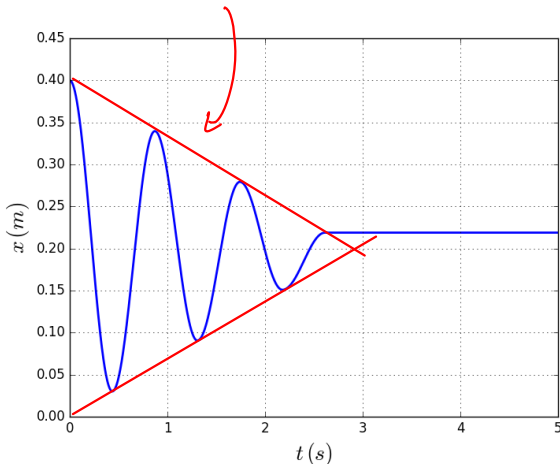
avec $\sigma_c = \sqrt{gR \cos \alpha}$

M4- Amortissement et arrêt d'un oscillateur



amortissement linéaire

1.



$\mu = \text{cte} \Rightarrow$ amortissement linéaire.

$\vec{f} = -h\vec{v}$ impliquerait un amortissement exponentiel des oscillations (voir S11) et non linéaire. Ce modèle de force ne s'applique donc pas à la situation.

2. Position d'équilibre ?

Syst : mobile

Ref : \mathcal{R} , labo, galiléen

IDF : - poids $\vec{P} = m\vec{g} = -mg \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
 - réaction normale $\vec{N} = \begin{pmatrix} 0 \\ N \\ 0 \end{pmatrix}$

Base de travail $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$

- réaction tangentielle $\vec{T} = \begin{pmatrix} T \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

- force de rappel du ressort : $\vec{F} = -k(l-l_0)\vec{e}_x = -k(l-l_0) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
 avec $l = x$

A l'équilibre :

$$\begin{cases} \vec{P} + \vec{T} + \vec{N} + \vec{F} = \vec{0} & (1) \\ \|\vec{T}\| < \mu \|\vec{N}\| & (2) \end{cases}$$

condition à traduire sur x .

(1) $\cdot \vec{e}_x$: $T - k(x_{eq} - l_0) = 0 \Leftrightarrow T = k(x_{eq} - l_0)$

(1) $\cdot \vec{e}_y$: $-mg + N = 0 \Leftrightarrow N = mg$

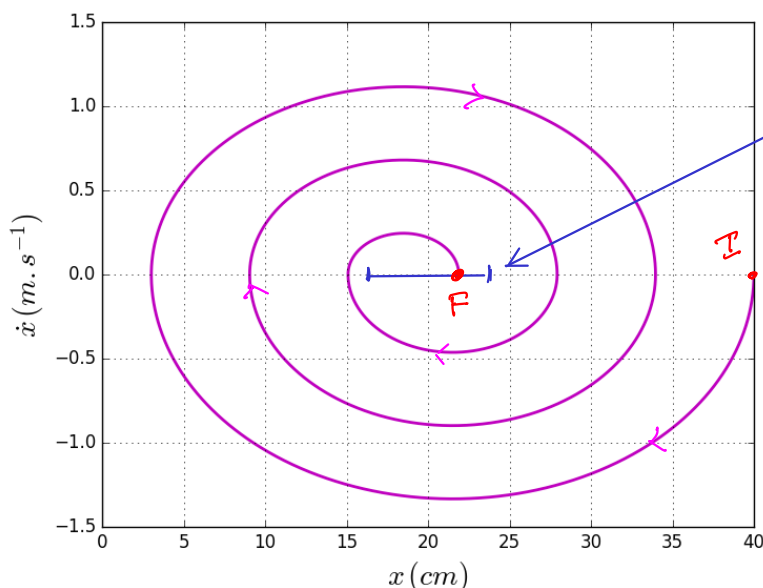
La condition (2) devient : $|k(x_{eq} - l_0)| < \mu mg$

$$\Leftrightarrow -\mu mg < k(x_{eq} - l_0) < \mu mg$$

$$\Leftrightarrow l_0 - \frac{\mu mg}{k} < x_{eq} < l_0 + \frac{\mu mg}{k} \quad (*)$$

Donc si \dot{x} s'annule alors que x appartient à la plage définie par (*), l'oscillateur s'arrête.

A.N. : $\Delta = \frac{\mu mg}{k} = \frac{0,12 \times 0,5 \times 9,81}{13} \approx 4,5 \text{ cm}$



plage d'équilibre autour de l_0 : $[l_0 - \Delta, l_0 + \Delta]$. On constate que l'oscillateur s'arrête bien une fois que \dot{x} s'annule dans cette plage et pas avant.