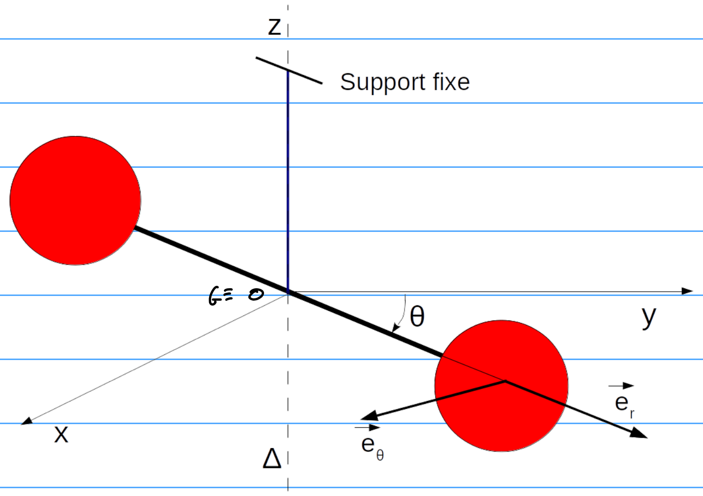
TD M5
Solide en rotation autour d'un axe

M1 - Pendule de torsion



Syst : pendule

Ref : labo $\mathcal{R}$, galiléen.

Inventaire des actions mécaniques

* poids : $\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{P}) = \vec{OG} \wedge \vec{P} = \vec{0}$
  $\Rightarrow \mathcal{M}_{Oz}(\vec{P}) = 0$
* tension du fil : $\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{T}) = \vec{OO} \wedge \vec{T} = \vec{0}$
  $\Rightarrow \mathcal{M}_{Oz}(\vec{T}) = 0$
* torsion du fil : $\mathcal{M}_{f,Oz} = -C\theta$

Théorème du moment cinétique appliqué au pendule dans $\mathcal{R}$ par rapport à Oz :

$$\left.\frac{dL_{Oz}}{dt}\right|_{\mathcal{R}} = \sum \mathcal{M}_{Oz} \quad \text{avec} \quad L_{Oz} = J\dot{\theta}$$

$$\Leftrightarrow J\ddot{\theta} = -C\theta \Leftrightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0} \quad \text{avec} \quad \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{C}{J}}}$$

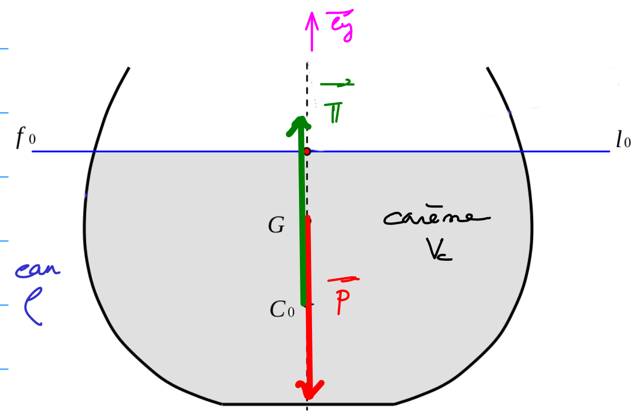
$$\text{Soit } C = J\omega_0^2 \Leftrightarrow \boxed{C = 2m\left(L^2 + \frac{a^2}{5}\right)\omega_0^2}$$

A.N. :
- $m = 1\,kg$
- $L = 20\,cm$
- $a = 3\,cm$
- $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ avec $T_0 = 0{,}5\,s$ (graphiquement)

$\Big\}\ C = 13\ Nm$

M2 - Stabilité de bateau

1. Flottabilité



Syst : bateau

Ref : terrestre, galiléen.

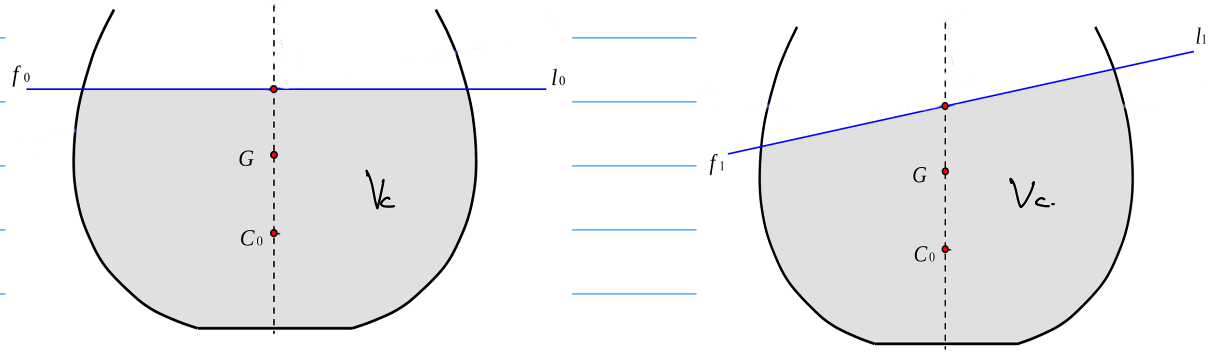
IDF selon Oz :

- $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{e_z}$
- $\vec{\Pi} = -\rho V_c \vec{g}$ (poussée d'Archimède)

Si le bateau est à l'équilibre suivant la verticale alors : $\vec{\Pi} + \vec{P} = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow \boxed{V_c = \frac{m}{\rho}}$$

1.2.

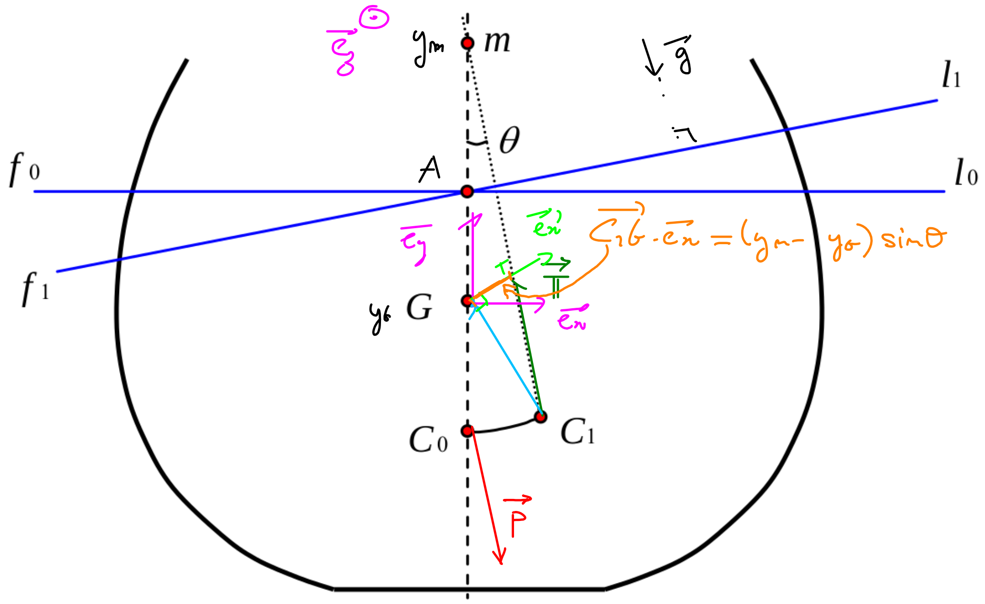


$V_c = \frac{m}{\rho}$ indépendant de l'inclinaison du bâteau. Seule la forme de la carène change.

2. Stabilité

2.1.

⚠ à la direction de la verticale $\vec{g}$ lorsque le bâteau s'incline.



2.2. Couple Γ par rapport à $(A,\vec{e_z})$ résultant de l'action de $\vec{\Pi}$ et $\vec{P}$:

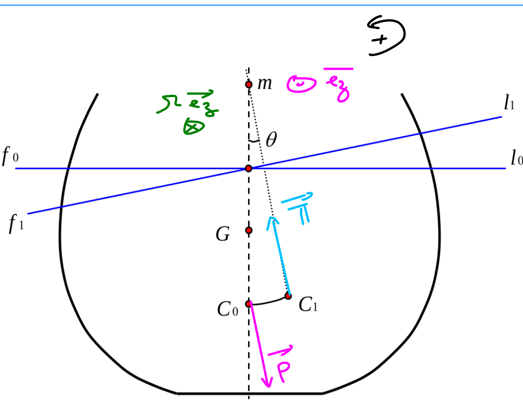
$$\Gamma = \left(\vec{\mathcal{M}}_A(\vec{P}) + \vec{\mathcal{M}}_A(\vec{\Pi})\right)\cdot\vec{e_z} = \left(\vec{AC_1}\wedge\vec{\Pi} + \vec{AG}\wedge\vec{P}\right)\cdot\vec{e_z}$$

$$= \left(\vec{AC_1}\wedge(-\vec{P}) + \vec{AG}\wedge\vec{P}\right)\cdot\vec{e_z} = \left(\vec{C_1G}\wedge\vec{P}\right)\cdot\vec{e_z} = \left(\vec{P}\wedge\vec{e_z}\right)\cdot\vec{C_1G}$$

$$= -mg\,\vec{e_x}'\cdot\vec{C_1G} = -mg\sin\theta\,(y_m - y_G)$$

Donc $\boxed{\Gamma = -mg\sin\theta\,(y_m - y_G)}$

2.3.



× Inclinaison dans le sens direct $\theta > 0$ alors :

– si $y_m > y_G$, $\Gamma < 0$: le couple redresse le bâteau.

– si $y_m < y_G$, $\Gamma > 0$: le couple fait chavirer le bâteau.

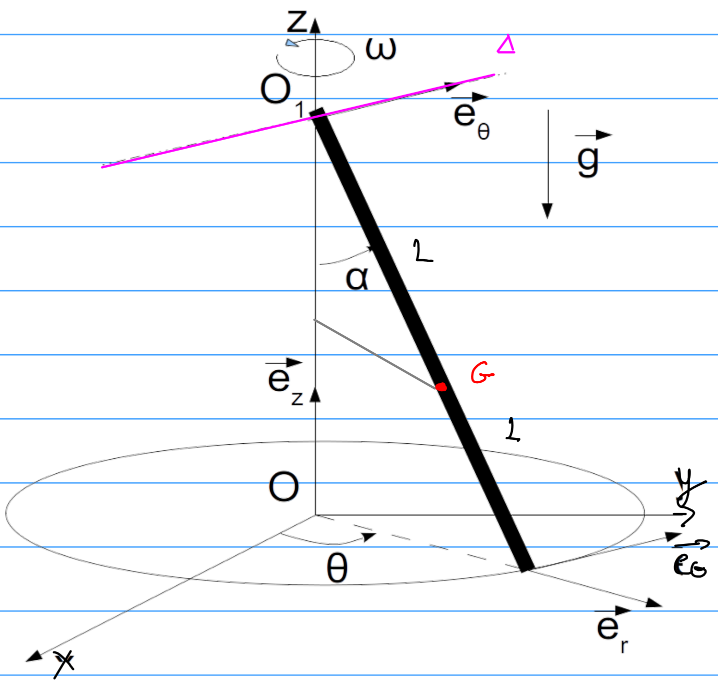
Même raisonnement pour $\theta < 0$.

Le bâteau est stable vis à vis d'une inclinaison transversale si le métacentre m est au dessus du centre de gravité G.

2.4. On peut améliorer la stabilité du bâteau càd augmenter le couple de redressement Ω :

- en abaissant G (jouer sur la distribution de masse)
- en élevant m (jouer sur la forme de la carène)

M3 - Pendule conique



- frottement négligés
- liaison parfaite : $\mathcal{M}_{l,\Delta} = 0$

1. Moteur à l'arrêt

1.1. Dans $(O_1, \vec{e_r}, \vec{e_\theta}', \vec{e_z})$:

$$G = \begin{pmatrix} -\frac{L}{2}\cos\alpha \\ 0 \\ \frac{L}{2}\sin\alpha \end{pmatrix}$$

1.2. Syst : pendule

Réf : labo $\mathcal{R}$, galiléen

BDF :

- poids $\vec{P} = -mg \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) = \vec{\mathcal{M}}_{O_1} \cdot \vec{e_\theta}$

$= (\vec{O_1G} \wedge \vec{P}) \cdot \vec{e_z}$

$= -mg\frac{L}{2} \begin{pmatrix} -\cos\alpha \\ 0 \\ \sin\alpha \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$= +mg\frac{L}{2}\sin\alpha$ ✓

> 0 si $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$

TMC appliqué au pendule par rapport à Δ ds $\mathcal{R}$:

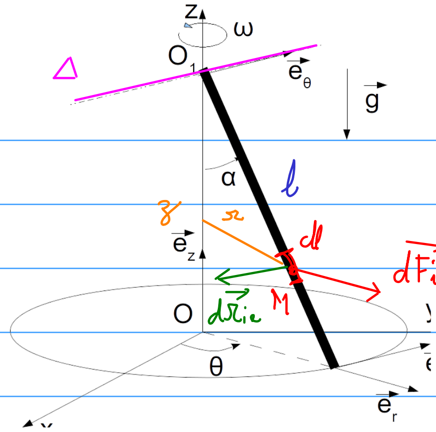
$$\left.\frac{dL_\Delta}{dt}\right|_{\mathcal{R}} = \mathcal{M}_\Delta(P) \Leftrightarrow J\ddot{\alpha} = -mg\frac{L}{2}\sin\alpha$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\ddot{\alpha} + \omega_0^2 \sin\alpha = 0} \quad \text{avec} \quad \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{mgL}{2J}}}$$

pulsation caractéristique de l'oscillateur.

Équation d'un oscillateur anharmonique

2. Moteur en marche



2.1. $\overrightarrow{\Gamma_{ie,O_1}} = \int_0^L \underbrace{\overrightarrow{O_1M} \wedge \overrightarrow{dF_{ie}}}_{d\Gamma_{ie}}$

avec $\overrightarrow{O_1M} = r\,\vec{e_r} + z\,\vec{e_z}$

$\overrightarrow{dF_{ie}} = \frac{m}{L} d\ell\, \omega^2 r\, \vec{e_r}$

$\Rightarrow \overrightarrow{O_1M} \wedge \overrightarrow{dF_{ie}} = \frac{m}{L} d\ell\, \omega^2 r z\, \vec{e_\theta}$

avec $r = \ell \sin\alpha$ et $z = -\ell\cos\alpha$

$\Rightarrow \overrightarrow{O_1M} \wedge \overrightarrow{dF_{ie}} = -\frac{m}{L}\omega^2 \ell^2 d\ell \cos\alpha\sin\alpha\, \vec{e_\theta}$

D'où $\overrightarrow{\Gamma_{ie,O_1}} = -\frac{m}{L}\omega^2\cos\alpha\sin\alpha \int_0^L \ell^2 d\ell \Leftrightarrow \boxed{\overrightarrow{\Gamma_{ie,O_1}} = -\frac{m}{3}L^2\omega^2\cos\alpha\sin\alpha\,\vec{e_\theta}}$

2.2. Equat° d'évolution de α ≡ TMC par rapport à Δ !

$\frac{dL_\Delta}{dt} = \Gamma_{ie,\Delta} + \Gamma_\Delta(\vec{P}) \Leftrightarrow \boxed{J\ddot{\alpha} = -\frac{m}{3}L^2\omega^2\cos\alpha\sin\alpha + mg\frac{L}{2}\sin\alpha}$

Positions d'équilibre : $\alpha = \alpha_{eq} \Rightarrow \ddot{\alpha} = 0$ d'où :

$-\frac{\cancel{m}}{3}\cancel{L}^{\cancel{2}}\omega^2\cos\alpha_{eq}\sin\alpha_{eq} + \cancel{m}g\frac{\cancel{L}}{2}\sin\alpha_{eq} = 0$

$\Leftrightarrow \sin\alpha_{eq}\left(\omega_0^2 - \omega^2\cos\alpha_{eq}\right) = 0$

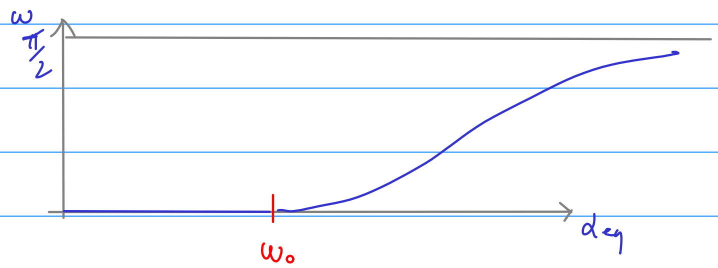
$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_{eq} = 0\ [\pi] & \text{lié à } \vec{F}_{ie} \\ \cos\alpha_{eq} = \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 & \text{compétition Poids vs Force centrifuge.} \end{cases}$

lié à $\vec{P}$

2.3. Si $\omega > \omega_0$ alors $\exists\ \boxed{\alpha_{eq} = \arccos\left(\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2\right)}$

2.4. Tant que $\omega < \omega_0$, la position d'équilibre est $\alpha_{eq} = 0$. Pour $\omega > \omega_0$, $\alpha_{eq} = \arccos\left(\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2\right)$.

$\lim_{\omega \to +\infty} \alpha_{eq} = \frac{\pi}{2}$



M4 - Vitesse de rotation en patinage artistique.