TD M5 – Solide en rotation autour d'un axe

D.Malka – MPSI 2018-2019 – Lycée Jeanne d'Albret

M1 – Pendule de torsion

On considère le pendule de torsion représenté fig.1. Ce type de pendule est constitué d'une tige horizontale de longueur $2L = 40\,\mathrm{cm}$ dont les extrémités sont lestées par deux boules identiques de masse $m = 1\,\mathrm{kg}$ et de rayon $a = 3\,\mathrm{cm}$. Cette tige est suspendue par un fil métallique très fin d'axe Δ. Si on tourne la tige d'un angle θ autour de Δ, la torsion du fil engendre un couple de rappel qui vaut $-C\theta\vec{e}_z$.

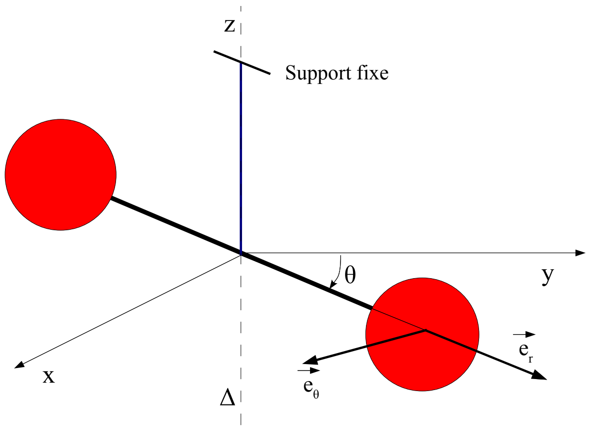


Figure 1 – Pendule de torsion

Moment d'inertie du pendule par rapport à Δ : $J = 2m\left(L^2 + \dfrac{a^2}{5}\right)$.

En appliquant le théorème du moment cinétique par rapport à Δ et en exploitant la figure 2, déterminer la constante de torsion C du pendule. On négligera les frottements.

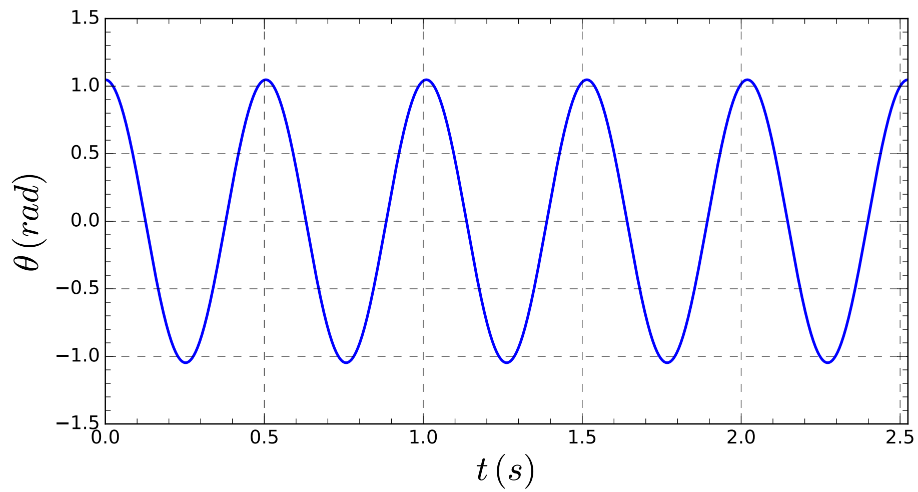


Figure 2 – Oscillations du pendule

M2 – Stabilité des bateaux

Dans ce problème, on s'intéresse sommairement à la flottabilité et à la stabilité d'un bateau. On appelle carène, le volume immergé V_c du bateau. On appelle *centre de carène* le centre géométrique du volume immergé du bateau. C'est aussi le point d'application de la poussée d'Archimède.

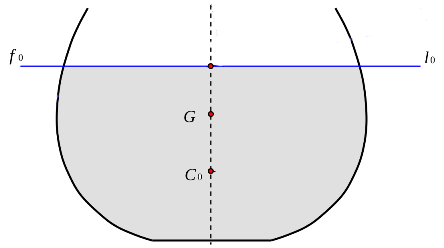
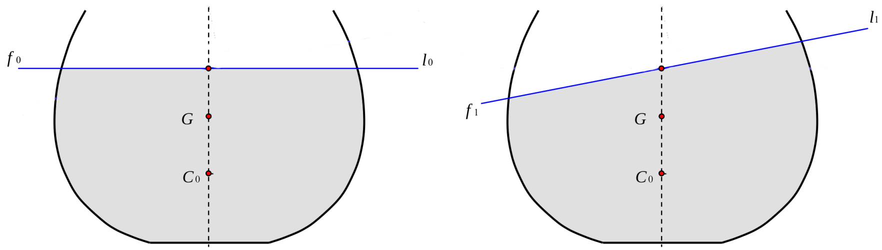


FIGURE 3 – Flottaison d'un bateau. $f_0 l_0$ est la ligne de flottaison c'est-à-dire le niveau de la surface libre de l'eau. G est le centre de gravité du bateau et C_0 est le centre de carène associé à la ligne de flottaison $f_0 l_0$.

1. **Flottabilité**
   1.1 Exprimer la carène en fonction de la masse du bateau et de la masse volumique de l'eau.
   1.2 La carène varie-t-elle lorsque le bateau est incliné (fig.4) ? Justifier.



(a) (b)

FIGURE 4 – Dans le référentiel du bateau, c'est la ligne de flottaison qui s'incline.

2. **Stabilité**.
   On considère un bateau s'inclinant autour de $(A, \vec{e}_z)$ (l'axe d'inclinaison) (fig.5). On cherche à étudier la dynamique du bateau suite à cette inclinaison, en particulier à savoir dans quelle(s) condition(s) il est stable.
   2.1 Représenter le poids $\vec{P}$ et la poussée d'Archimède $\vec{\Pi}$ sur la figure 5.

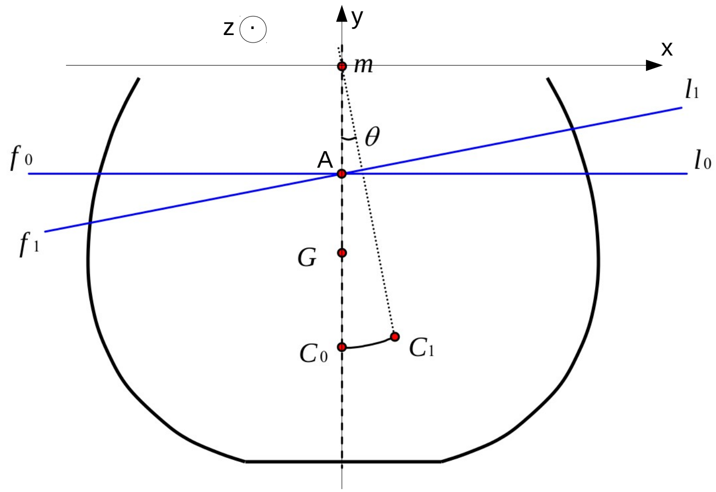


FIGURE 5 – Stabilité d'un bateau vis-à-vis d'une petite inclinaison. Lorsque le bateau s'incline faiblement, on peut considéré que le centre de carène décrit un arc de cercle. Le point m est appelé métacentre.

   2.2 Évaluer le couple $\vec{\Gamma}$ par rapport à l'axe d'inclinaison subi par le bateau en fonction de θ, y_m et y_G. *On redonne la propriété du produit mixte :* $(\vec{a} \wedge \vec{b}).\vec{c} = (\vec{c} \wedge \vec{a}).\vec{b} = (\vec{b} \wedge \vec{c}).\vec{a}$.
   2.3 A quelle condition le bateau est-il stable ?
   2.4 Comment améliorer la stabilité du tableau ?

M3 – Pendule conique

On s'intéresse au problème du pendule conique. Une tige mince, homogène, de masse m, de longueur L, est mise en rotation autour de l'axe Oz à la vitesse angulaire ω (fig.6) par un moteur. L'expérience montre qu'au delà d'une valeur seuil de ω_c, le pendule s'écarte de l'axe Oz d'un angle α. Dans ce problème, on recherche la valeur seuil ω_c et la dépendance de α avec ω en appliquant le théorème du moment cinétique par rapport à O_1. On se placera dans le référentiel $\mathcal{R}$ tournant autour de Oz avec la tige. Le moment d'inertie de la tige par rapport à $\Delta = (O_1, \vec{e}_\theta)$ s'écrit : $J = \dfrac{1}{3} m L^2$.

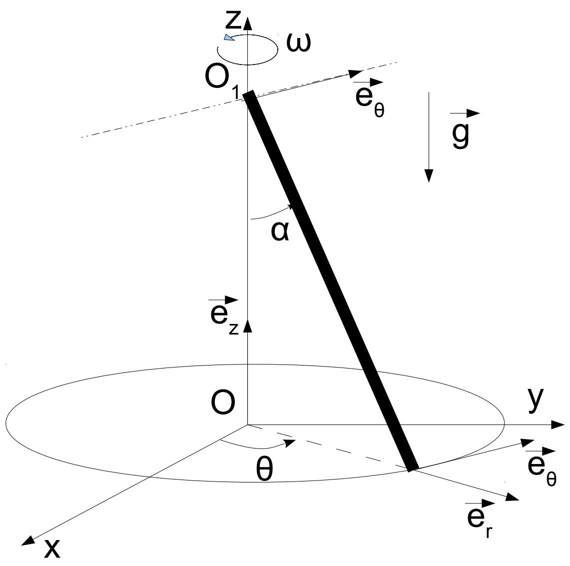


FIGURE 6 – Le pendule conique

1. Le moteur est à l'arrêt.

   1.1 Donner les coordonnées du centre de masse G de la tige.

   1.2 La tige ne pouvant que tourner d'un angle α dans le plan $(O_1, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$, déterminer l'équation du mouvement de la tige et mettre en évidence une pulsation caractéristique ω_0 du pendule.

2. Le moteur est en marche. Dans le référentiel $\mathcal{R}$, il existe une pseudo-force $\overrightarrow{dF}_{ie} = \dfrac{m}{L}\, dl\, \omega^2 r \vec{e}_r$ s'exerçant sur chaque portion dl de la tige.

   2.1 Montrer que le moment par rapport à O_1 de la force $\overrightarrow{F}_{ie}$ sur la tige s'écrit :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_{ie,O_1} = -\frac{mL^2}{3}\omega^2 \cos\alpha \sin\alpha \vec{e}_\theta$$

   2.2 Déterminer l'équation d'évolution de $\alpha(t)$ et montrer que pour $\omega > \omega_c$ (ω_c à déterminer), il existe une position d'équilibre $\alpha_{eq} \neq 0[\pi]$ dont on admettra qu'elle est stable.

   2.3 Quel est le lien entre α_{eq}, ω_c et ω ?

   2.4 Représenter alors graphiquement α_{eq} en fonction de ω.

M4 – Vitesse de rotation en patinage artistique

Expliquer les variations de la vitesse de rotation des patineurs que montre la vidéo :

`http://www.dailymotion.com/video/xcbf6a_brian-et-philippe_sport`