# TD M6 – Mouvement dans champ de force newtonien

D.Malka – MPSI 2018-2019 – Lycée Jeanne d'Albret

**Données générales**

- constante de gravitation universelle $G = 6{,}67 \times 10^{11}\,\mathrm{N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}}$,
- période de rotation propre de la Terre (jour sidéral) $J_s = 86\,164\,\mathrm{s}$.

| Astre | Masse (kg) | Rayon moyen (m) | Demi-grand axe (m) |
|---|---|---|---|
| Soleil | $1{,}99 \times 10^{30}$ | $6{,}96 \times 10^{8}$ | x |
| Terre | $5{,}98 \times 10^{24}$ | $6{,}37 \times 10^{6}$ | $1{,}50 \times 10^{11}$ |
| Lune | $7{,}35 \times 10^{22}$ | $1{,}74 \times 10^{6}$ | $3{,}844 \times 10^{8}$ |

On suppose que les astres présentent une répartition sphérique de masse.

## M1 – Satellite géostationnaire

1. **Corps en orbite circulaire**

   1.1 A partir de l'expression de l'énergie mécanique, montrer que la vitesse d'un corps (de masse $m$) en orbite circulaire de rayon $r_0$ autour d'un astre attracteur (de masse $M$) vaut :

   $$v_0 = \sqrt{\frac{GM}{r_0}}$$

   1.2 Enoncer la $3^{\grave{e}me}$ loi de Képler et la démontrer dans le cas du mouvement circulaire.

2. **Satellite en orbite géostationnaire.**

   On appelle satellite géostationnaire un satellite survolant à chaque instant le même point de la Terre.

   2.1 Dans quel plan la trajectoire d'un satellite géostationnaire est-elle nécessairement comprise ?

   2.2 Calculer l'altitude $h$ d'un satellite géostationnaire. Commenter. Application numérique.

## M2 – Trajectoire d'une comète

La Terre décrit autour du Soleil (de centre $S$) une orbite quasiment circulaire de rayon $r_0 = 1{,}5 \times 10^8 km$ à la vitesse moyenne $v_T = 30\,\mathrm{km \cdot s^{-1}}$.

Une comète $C$ passe extrêmement près du Soleil : distance au périhélie $r_p = \alpha r_0$ avec $\alpha = 5 \times 10^{-3}$.

Des mesures précises ont montré que la trajectoire de la comète est une ellipse de grande excentricité $e$. On pose $e = 1 - x$ avec $x = 1 \times 10^{-4}$.

On redonne l'équation polaire d'une ellipse d'excentricité $e$ et de paramètre $p$ :

$$r(\theta) = \frac{p}{1 + e\cos(\theta)} \quad \text{avec} \quad 0 < e < 1$$

1. Calculer la vitesse maximale $v_{max}$ de la comète en supposant sa trajectoire parabolique.
2. Représenter la trajectoire en faisant figurer l'aphélie $A$ et le périhélie $P$ ainsi que les distances $r_P = SP$ et $r_a = SA$.
3. Jusqu'à quelle distance $r_a$ la comète va-t-elle s'éloigner du Soleil ? Évaluer sa vitesse $v_a$ à cette distance.
4. Quelle durée $\tau$ la comète met-elle pour atteindre cette position extrême depuis le périhélie ?

## M3 – Trou noir « classique »

On appelle horizon d'un trou noir la distance au trou noir en deçà de laquelle aucun corps ne peut échapper à l'attraction du trou noir c'est-à-dire en deçà de laquelle la vitesse de libération devient supérieure à la célérité de la lumière $c$ dans le vide. C'est un concept de relativité générale. Nous en proposons ici une approche classique.

1. Expliquer la dénomination « trou noir » d'un corps possédant un tel horizon.
2. Si le Soleil, à sa mort, venait à devenir un trou noir [1], quel serait son horizon ?
3. Minorer alors la masse volumique de ce trou noir. Commenter.

## M4 – Modèle de Bohr de l'atome d'hydrogène

1. **Modèle planétaire**

L'expérience de Rutherford a mis en défaut le modèle de Thomson de l'atome. Le premier propose donc un modèle planétaire de l'atome d'hydrogène : il est constitué d' un électron (masse $m$, charge $-e$) en orbite circulaire de rayon $r$ autour d'un proton $P$ (charge $+e$) supposé fixe dans le référentiel d'étude (voir Fig.1). A cette échelle, la force de gravitation est négligeable.

Données : $h = 6{,}63 \times 10^{-34}\,\mathrm{J \cdot s^{-1}}$, célérité de la lumière dans le vide $c = 2{,}99 \times 10^{8}\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$, charge élémentaire $e = 1{,}6 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$, masse de l'électron $m = 9{,}0 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg}$, définition de l'électron-Volt : $1\,\mathrm{eV} = 1{,}6 \times 10^{-19}\,\mathrm{J}$.

1.1 Exprimer la force exercée par le proton sur l'électron. En déduire l'énergie potentielle associée à l'atome.

1.2 Exprimer alors l'énergie mécanique de l'électron en fonction du rayon de l'orbite $r$.

*L'électron étant en accélération, classiquement il doit céder de l'énergie par rayonnement.*

1.3 Dans le modèle planétaire, la trajectoire de l'électron peut-elle rester circulaire ? Cet atome est-il théoriquement stable ?

2. **Modèle de Bohr**

1. On sait qu'en fait, il deviendra une naine blanche

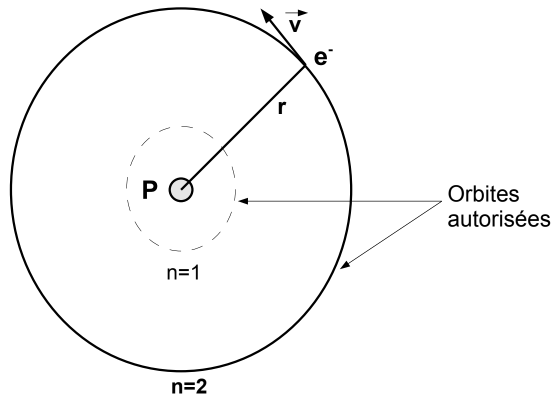



FIGURE 1 – Modèle de Bohr de l'atome H

Pour rendre compte du spectre de raies discret de l'atome d'hydrogène et de sa stabilité, Bohr postule que l'électron ne peut occuper que certaines orbites stables de rayons $r_n$ telles que le moment cinétique est quantifié : $L_P(n) = n\dfrac{h}{2\pi}$ avec $n$ un entier naturel $\geq 1$ appelé nombre quantique principal.

2.1 Exprimer le moment cinétique de l'électron $L_P(n)$ en fonction de $r_n$.

2.2 En déduire, en fonction de $n$, les rayons $r_n$ des orbites autorisées pour l'électron.

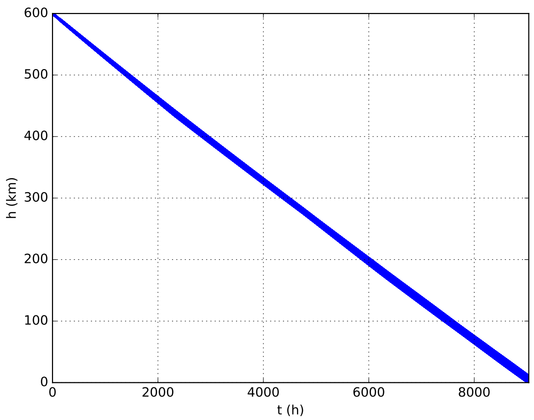
2.3 En déduire que l' énergie $E_n$ de l'électron occupant l'orbite $n$ peut s'écrire $-\dfrac{E_0}{n^2}$. Calculer numériquement $E_0$ en électron-Volt.

## M5 – Satellite soumis à une force de frottement

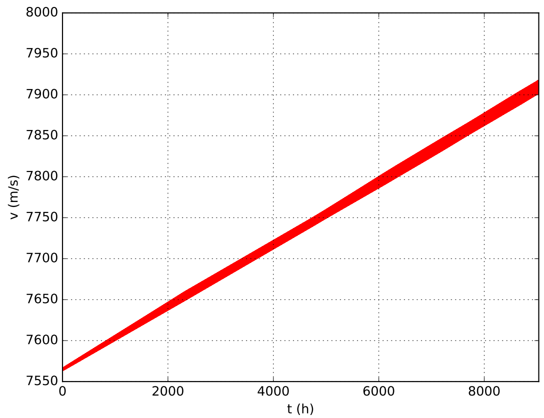
On considère un satellite, de masse $m = 3\,\mathrm{t}$ initialement en orbite circulaire autour de la Terre. Ce satellite évolue à basse altitude : initialement $h_0 = 40\,\mathrm{km}$. A cause de l'atmosphère terrestre, il subit une force de frottement $\vec{f} = -\mu v^2 \vec{e}_\theta$ avec $\mu > 0$ supposé constant pendant toute la durée du mouvement.

1. Que se passe-t-il qualitativement ?

2. Écrire les équations du mouvement dans la base cartésienne fixe par rapport au référentiel géocentrique.
3. Adimensionner les équations en opérant le changement de variable $t^* = t/T$, $x^* = x/R_T$ et $y^* = y/R_T$ avec $R_T$ le rayon de la Terre et $T$ la période d'un satellite en orbite de rayon $r = R_T$.
4. La simulation conduit aux courbes fig.2a et 2b. Interpréter, commenter.




(a) Altitude




(b) Vitesse

Figure 2 – Mouvement du satellite soumis aux forces de frottements atmosphériques.