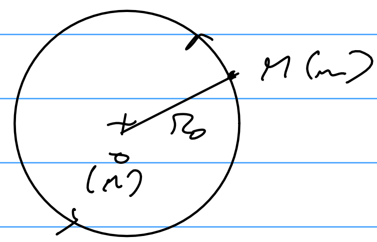
TD M6
Mvt dans un champ de force gravitationnel

M1. Satellite géostationnaire (à savoir !)

1. Corps en orbite circulaire.

1.1) Mq $v = \sqrt{\dfrac{GM}{R_0}}$



On sait : $E_m = -\dfrac{GMm}{2R_0}$

et $E_p = -\dfrac{GMm}{R_0}$

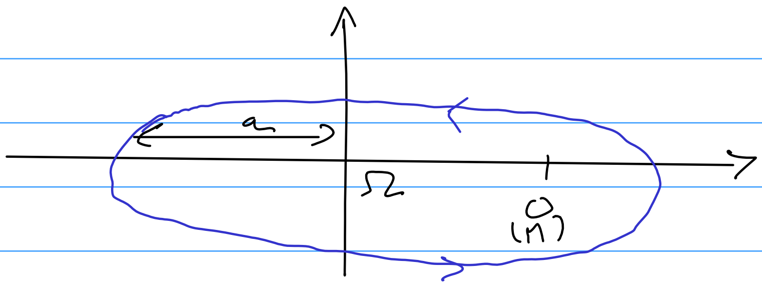
Or $E_c = E_m - E_p = +\dfrac{GMm}{2R_0}$

avec $E_c = \dfrac{1}{2}mv^2$:

$\dfrac{1}{2}\cancel{m}v^2 = \dfrac{GM\cancel{m}}{2R_0} \Leftrightarrow \boxed{v = \sqrt{\dfrac{GM}{R_0}}}$

$v = cste \Leftrightarrow$ mvt circulaire uniforme

1.2. 3ᵉ loi de Kepler : $\boxed{\dfrac{T^2}{a^3} = \dfrac{4\pi^2}{GM}}$



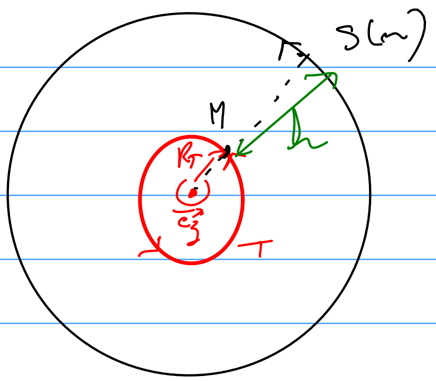
T : période du mouvement.

Démo : cas du mvt circulaire :

$$T = \frac{2\pi R_0}{v} = \frac{2\pi R_0}{\sqrt{\frac{GM}{R_0}}} \Rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2 R_0^2}{\frac{GM}{R_0}} = \frac{4\pi^2 R_0^3}{GM}$$

$$\Leftrightarrow \frac{T^2}{R_0^3} = \frac{4\pi^2}{GM} \quad \text{cqfd.}$$

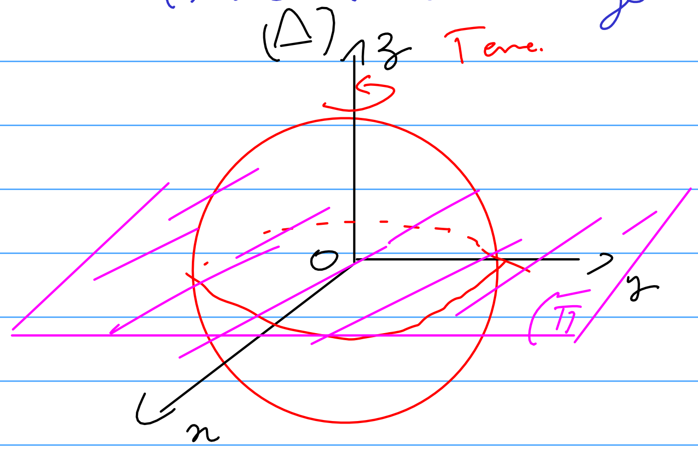
2. Satellite géostationnaire.



S géostationnaire si toujours au dessus de m̄ pt M de la Terre.

$\Rightarrow$ m̄ vitesse angulaire que la Terre.
(soit la m̄ période).

2.1. Plan (Π) de l'orbite géostationnaire



(a) : $(\Pi) \perp (Oz)$

(b) : mvt ā force centrale de centre O

$\Rightarrow$ mvt plan $\ni$ O

Le seul plan $\perp (Oz)$ contenant O est le plan équatorial (Oxy)

2.2./ Altitude h d'un satellite géostationnaire

Il faut $T = J_s$. Rayon de l'orbite $R_T + h$?

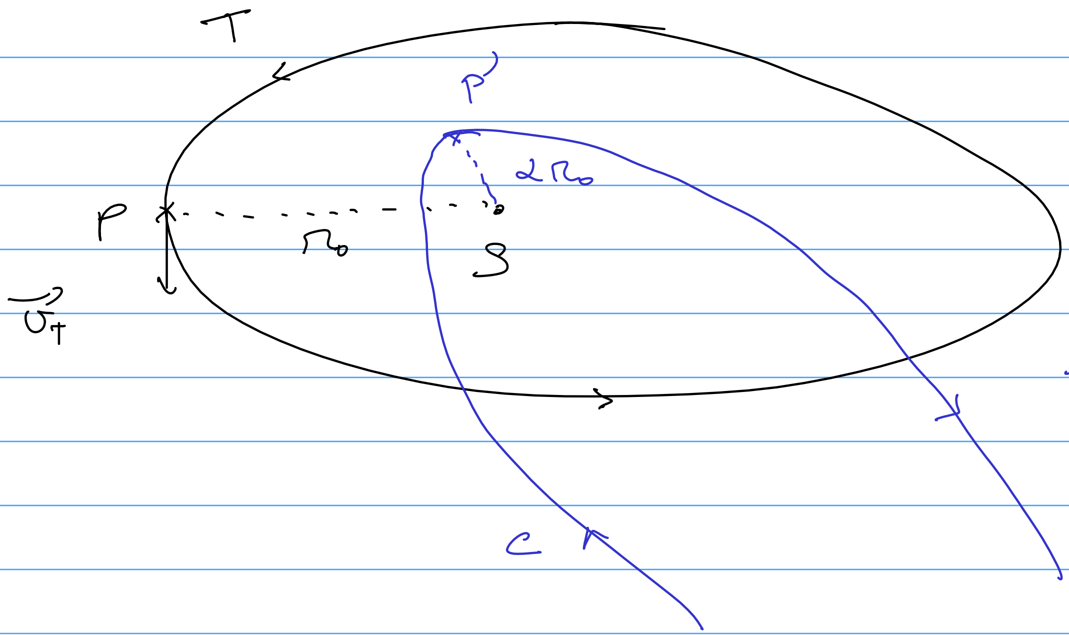
3ē loi de Képler : $\dfrac{J_s^2}{(R_T+h)^3} = \dfrac{4\pi^2}{G M_T}$

$$\Rightarrow (R_T+h)^3 = \frac{J_s^2 G M_T}{4\pi^2} \Rightarrow \boxed{h = \left(\frac{J_s^2 G M_T}{4\pi^2}\right)^{1/3} - R_T}$$

A.N. : $h \approx 36\ 000$ km

M2 - Trajectoire d'une comète

$v_T = 30 \text{ km.s}^{-1}$



ellipse

$e = 1 - x$

$x = 10^{-4}$

$r(\theta) = \dfrac{p}{1 + e\cos\theta}$

1/ Trajectoire parabolique : $E_m = 0$

On $E_m = E_c + E_p$

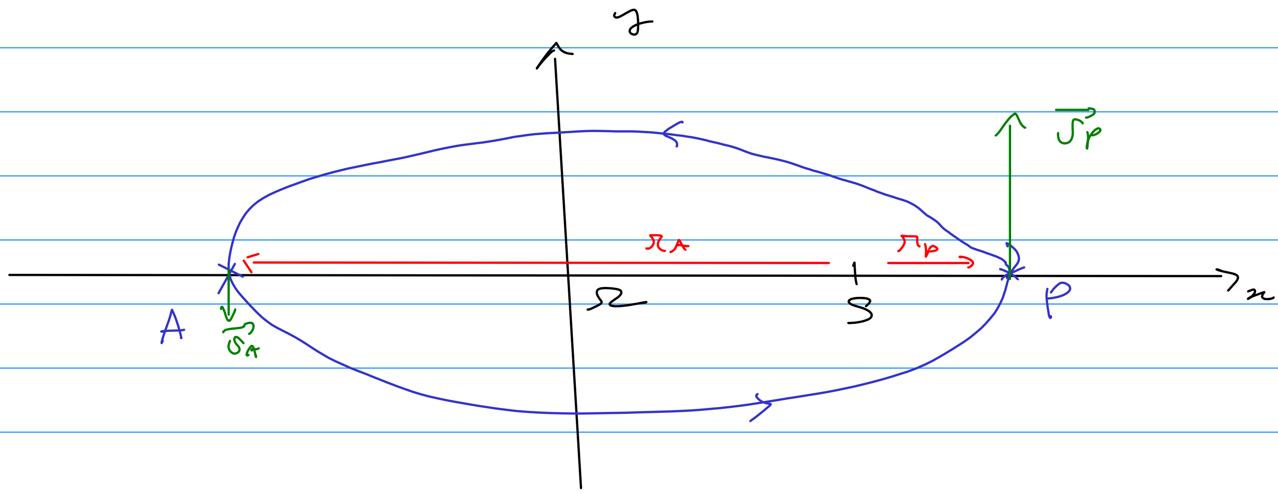
En P, $r = 2r_0$, E_p minimale donc E_c maximale donc $v_{max} = v_P$

Avec $E_c(P) = -E_p(P) \Leftrightarrow \dfrac{1}{2} m v_P^2 = \dfrac{G M_S m}{2 r_0}$

$$\Rightarrow \boxed{v_P = \sqrt{\frac{2 G M_S}{2 r_0}}}$$

A.N : $v_P \simeq 600 \text{ km.s}^{-1}$

2/



3/ $r_A = ?$, En A : $\theta = \pi$

$$\Rightarrow r_A = r(\pi) = \frac{p}{1-e}$$

avec $e = 1 - x$ $\Rightarrow r_A = \frac{p}{x}$

$p = ?$ En P : $\theta = 0$

$$\Rightarrow r_P = r(0) = \frac{p}{1+e} \Leftrightarrow p = r_p(1+e)$$
$$= r_p(2-x)$$

D'où $r_A = r_p \times \frac{2-x}{x} \Rightarrow \boxed{r_A \approx \frac{2}{x} \alpha r_0}$

A.N. $r_A \approx 2 \times 10^4 \times 5 \times 10^{-3} \times 1,5 \times 10^{11} = 1,5 \times 10^{13}$ m

$v_A = ?$ Conservat° du moment cinétique

$$\Rightarrow \vec{L_A} = \vec{L_P} \Leftrightarrow r_A v_A = r_p v_p$$

$$\Leftrightarrow v_A = v_p \times \frac{r_p}{r_A} \Rightarrow \boxed{v_A \approx \frac{x}{2} v_p}$$

A.N. : $v_A \approx 120$ m.s^{-1} très lent !

4/ Durée τ pour aller de P à A.

$\tau = \frac{T}{2}$, où T période de l'orbite de la comète

Or connaît : $a = \frac{1}{2}(r_A + r_p) \approx \frac{r_A}{2}$, demi-grand axe de l'orbite.

3ᵉ loi de Kepler : $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM_S}$

$$\Leftrightarrow \frac{\tau^2}{4\frac{r_A^3}{2^3}} = \frac{4\pi^2}{GM_S}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cancel{2}\tau^2}{r_A^3} = \frac{\overset{2}{\cancel{4}}\pi^2}{GM_S}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\tau = \sqrt{\frac{2\pi^2 r_A^3}{GM_S}}}$$

A.N. : $\tau \simeq 250$ ans

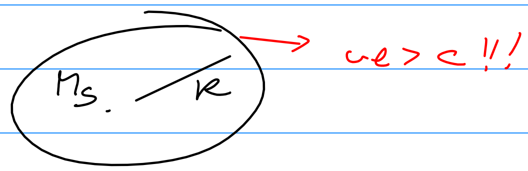
M3 - Trou noir "classique"

1/ En deçà de l'horizon du trou noir, la lumière est piégé par le trou noir ce qui le rend invisible.

2/ R : horizon

M_S : masse du trou noir $\simeq$ masse du Soleil

Il faut $v_\ell > c$.



avec $v_\ell = \sqrt{\dfrac{2GM_S}{R}}$

D'où $\sqrt{\dfrac{2GM_S}{R}} > c \iff \dfrac{2GM_S}{R} > c^2$

$$\iff \boxed{R < \frac{2GM_S}{c^2}}$$

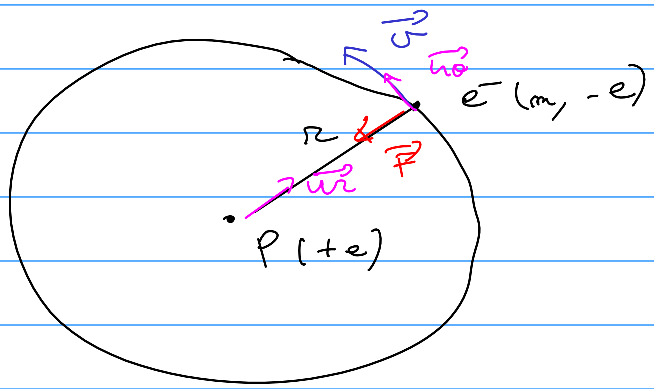
A.N. $R \sim 3$ km !!!

3/ Masse volumique : $\rho = \dfrac{M_S}{\frac{4}{3}\pi R^3} = 2 \times 10^{19}\ \mathrm{kg.m^{-3}}$!!!

proton : $\rho \sim \dfrac{10^{-26}}{(10^{-15})^3} \sim 10^{19}$ ...

M4 - Modèle de Bohr de l'atome d'hydrogène

1. Modèle planétaire.



1.1/ $\vec{F} = + \dfrac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u_r}$

$$\boxed{\vec{F} = - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u_r}}$$

Energie potentielle ?

$\vec{dl} = dr\,\vec{u_r} + r\,d\theta\,\vec{u_\theta}$

$$\delta W(\vec{F}) = \vec{F}\cdot\vec{dl} = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u_r}\cdot\vec{dl} = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr$$

$$= -d\left(-\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r} + K\right) = -dE_p$$

avec $\boxed{E_p(r) = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}} + \cancel{K}$ 0

$\lim_{r\to+\infty} E_p = 0$

1.2./ Energie mécanique : $E_m = E_p + E_c$

$$= -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{1}{2}mv^2$$

Calculons v.

Syst : $\bar{e}\,(m, -e)$

Ref : ref du proton $\mathcal{R}$, galiléen.

BDF : base de travail $(\vec{u_r}, \vec{u_\theta})$

Force centrale

$\vec{F} = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u_r}$

$\Rightarrow$ mvt plan.

RFD : $m\vec{a} = \vec{F}$

$r = cste$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m(\cancel{\ddot{r}}_{0} - r\dot{\theta}^2) = -\dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r} & (1) \\ m(2\cancel{\dot{r}}_{0}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \ddot{\theta} = 0 \Rightarrow \underline{\dot{\theta} = cste}$

mvt uniforme

$$(1) \quad -mr\dot{\theta}^2 = \frac{-e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$\dot{\theta} = f(v)$? $\quad v = \cancel{\dot{r}\vec{u_r}}_{0} + r\dot{\theta}\vec{u_\theta} \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{v}{r}$

$$\Rightarrow -mr\frac{v^2}{r^2} = \frac{-e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \Rightarrow \boxed{v = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m r}}}$$

D'où $E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r}$

D'où $\boxed{E_m = -\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r}}$

3/ $E_m \searrow$ par rayonnement avec $E = -\dfrac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r}$

$\Rightarrow$ $r \searrow$ $\Rightarrow$ l'ē tombe sur le proton.

$\Rightarrow$ atome instable. $\Rightarrow$ Modèle à revoir.

2. Modèle de Bohr

$\underbrace{L_p(n) = n\hbar}$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $\hbar = \dfrac{h}{2\pi}$, $h = 6,63 \times 10^{-34}$ J.s

2.1. $\vec{L}_p(n) = r_n \vec{u_r} \wedge m v_n \vec{u_\theta}$ (mvt circulaire)

$= m r_n v_n \vec{u_z}$

avec $v_n = \sqrt{\dfrac{e^2 m}{4\pi\varepsilon_0 \, r_n}}$ $\Rightarrow$ $\boxed{L_p(n) = \sqrt{\dfrac{e^2 m r_n}{4\pi\varepsilon_0}}}$

2.2. r_n ? $L_p(n) = n\hbar$

$\Leftrightarrow \sqrt{\dfrac{m e^2 r_n}{4\pi\varepsilon_0}} = n\hbar$

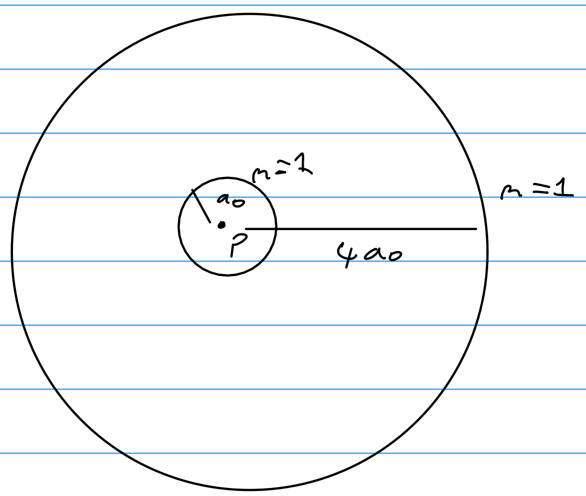
$\Rightarrow r_n^2 = n^2 \times \dfrac{\hbar^2 4\pi\varepsilon_0}{m e^2}$

$\Rightarrow \boxed{r_n^2 = n^2 \times a_0}$ $\boxed{a_0 = \dfrac{\hbar^2 4\pi\varepsilon_0}{m e^2}.}$

A.N. $a_0 \sim \dfrac{\cancel{36} \times 10^{-68}}{\cancel{40}} \times \dfrac{\overset{10}{\cancel{24}} \times 10^{-11}}{\cancel{2} \times 10^{-38} \times 10^{-30}} \sim 1 \times 10^{1-68-11+30+38} \sim 10^{-10} \sim 1$ Å

$\sim 0,1$ nm.

$\longrightarrow$ taille de l'atome d'hydrogène.



2.3. $E_n = -\dfrac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 n\, r_n} = E_n$ quantifiée → spectre discret des atomes.

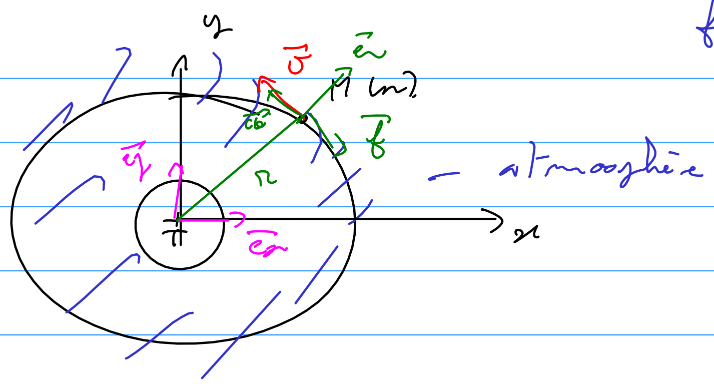
quantifié $r_n = n^2 a_0$

$$E_n = -\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 a_0} \times \frac{1}{n^2} \Longrightarrow \boxed{E_n = -\frac{E_0}{n^2}} \quad , \quad \boxed{E_0 = \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 a_0}}$$

<u>A.N.</u> : $a_0 = 5{,}2 \times 10^{-11}\ m$, $E_0 = 13{,}6\ eV$

~ énergie caractéristique d'un atome.

M5 -



$$\vec f = -\mu\left(\frac{v - v_{atm}}{v}\right)^2 \vec v$$

1) $\vec f$: dissipative $\mathcal{P} = \vec f \cdot \vec v < 0$

$\Rightarrow \dfrac{dE_m}{dt} = \mathcal{P} < 0 \Rightarrow E_m \searrow$ or $E_m = -\dfrac{GM_m}{2r}$

$\Rightarrow r \searrow \Rightarrow$ crash de M. sur Terre

2) Syst : M (m)

Ref : géocentrique $\mathcal{R}_g$, galiléen.

IDF : $-\ \vec F = -\dfrac{GM_m}{r^2}\vec e_r$

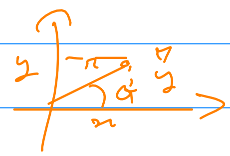
$-\ \vec f = -\mu\left(\dfrac{v - v_{atm}}{v}\right)^2 \vec v$

RFD : $m\vec a = \vec F + \vec f$

Projection sur $(\vec e_x, \vec e_y)$.

$$\begin{cases} m\ddot x = -\dfrac{GM_m}{r^2}\vec e_r\cdot\vec e_x - \mu\left(\dfrac{v - v_{atm}}{v}\right)^2 \dot x \\ m\ddot y = -\dfrac{GM_m}{r^2}\vec e_r\cdot\vec e_y - \mu\left(\dfrac{v - v_{atm}}{v}\right)^2 \dot y \end{cases}$$

avec $r = \sqrt{x^2+y^2}$, $v = \sqrt{\dot x^2 + \dot y^2}$



$\vec e_r\cdot\vec e_x = \cos\theta = \dfrac{x}{r}$, $\vec e_r \cdot \vec e_y = \sin\theta = \dfrac{y}{r}$.

D'où
$$\boxed{\begin{cases} \ddot x = -\dfrac{GM}{r^3}x - \dfrac{\mu}{m}\left(\dfrac{v - v_{atm}}{v}\right)^2 \dot x \\ \ddot y = -\dfrac{GM}{r^3}y - \dfrac{\mu}{m}\left(\dfrac{v - v_{atm}}{v}\right)^2 \dot y \end{cases}}$$

3) $t^* = t/T$ avec $T = \sqrt{\dfrac{4\pi^2 (R_T+h)^3}{GM_T}}$ période de l'orbite initial

$x^* = x/R_T$

$y^* = y/R_T$

$$\Rightarrow \dot{x}^* = \frac{dx^*}{dt^*} = \frac{dx}{dt} \times \frac{T}{R_T} \quad , \quad \dot{y}^* = \frac{dy^*}{dt^*} = \frac{dy}{dt} \times \frac{T}{R_T}$$

$$\Rightarrow \ddot{x}^* = \ddot{x} \times \frac{T^2}{R_T} \quad , \quad \ddot{y}^* = \ddot{y} \frac{T^2}{R_T}$$

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\dfrac{GM}{r^3} x - \dfrac{\mu}{m} \dfrac{(v - v_{atm})^2}{v} \dot{x} \\ \ddot{y} = -\dfrac{GM}{r^3} y - \dfrac{\mu}{m} \dfrac{(v - v_{atm})^2}{v} \dot{y} \end{cases}$$

devient :

$$\begin{cases} \dfrac{R_T}{T^2} \ddot{x}^* = -\dfrac{GM}{r^{*3}} \times \dfrac{R_T}{R_T^3} \times x^* - \dfrac{\mu}{m} \dfrac{(v^* - v_{atm}^*)^2}{v^*} \dot{x}^* \times \left(\dfrac{R_T}{T}\right)^2 \\ \dfrac{R_T}{T^2} \ddot{y}^* = -\dfrac{GM}{r^{*3}} \times \dfrac{R_T}{R_T^3} \times y^* - \dfrac{\mu}{m} \left(\dfrac{v^* - v_{atm}^*}{v^*}\right)^2 \dot{y}^* \times \left(\dfrac{R_T}{T}\right)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{x}^* = -\dfrac{GM}{r^{*3}} x^* \times \dfrac{T^2}{R_T^3} - \dfrac{\mu}{m} \left(\dfrac{v^* - v_{atm}^*}{v^*}\right)^2 \dot{x}^* \times R_T \\ \ddot{y}^* = -\dfrac{GM}{r^{*3}} \dot{y}^* \times \dfrac{T^2}{R_T^3} - \dfrac{\mu}{m} \left(\dfrac{v^* - v_{atm}^*}{v^*}\right)^2 \dot{y}^* \times R_T \end{cases}$$

$4\pi^2$

$$\boxed{\begin{cases} \ddot{x}^* = -4\pi^2 \dfrac{x^*}{r^{*3}} - \dfrac{\mu R_T}{m} \left(\dfrac{v^* - v_{atm}^*}{v^*}\right)^2 \dot{x}^* \\ \ddot{y}^* = -4\pi^2 \dfrac{y^*}{r^{*3}} - \dfrac{\mu R_T}{m} \left(\dfrac{v^* - v_{atm}^*}{v^*}\right)^2 \dot{y}^* \end{cases}}$$