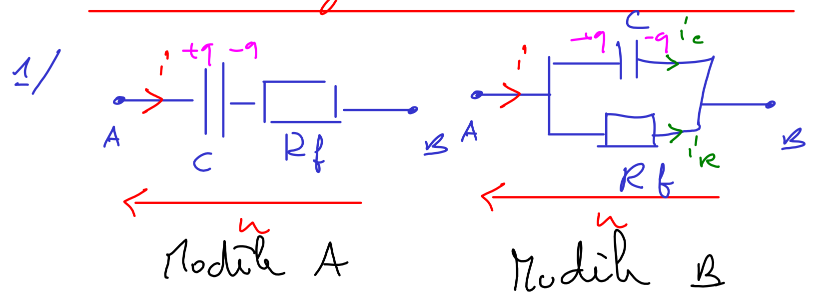
TD S10 – Corrigé

S1 - Résistance de fuite d'un condensateur

1/



Le modèle doit rendre compte de la décharge du condensateur isolé. Si le condensateur est isolé, $i = 0$. Seul le modèle B autorise un transfert de charge entre les deux armatures dans ces conditions.

2/ Valeur de R_f ?

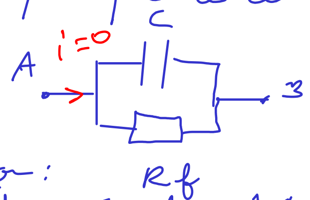
R_f est lié à la durée de la décharge du condensateur via $\tau = R_f C$ donc à la durée t_1 telle que :

$u(t=0^-) = E = 6V$

$u(t=t_1) = u_1 = 3,8V$ avec $t_1 = 30$ min.

Il faut déterminer t_1 en fonction de R_f. Pour obtenir t_1, il faut exprimer u_1 en fonction de t_1.

Lorsque le condensateur est isolé : $i = 0 \Rightarrow \frac{u}{R} + \frac{du}{dt} = 0$



$\Leftrightarrow \boxed{\dot{u} + \frac{u}{\tau} = 0}$ avec $\tau = R_f C$

Résolution :

* solution générale : $\forall t \geq 0,\ u(t) = A e^{-t/\tau}$
* Relation de continuité : La tension aux bornes d'un condensateur idéal est continue.
  En particulier à $t=0$:
  $u(t=0^+) = u(t=0^-)$ avec $\begin{cases} u(t=0^+) = A \\ u(t=0^-) = E \end{cases} \Rightarrow \underline{A = E}$
* Finalement : $\forall t \geq 0,\ \boxed{u(t) = E e^{-t/\tau}}$

Déterminons $\tau = RC$ puis R :

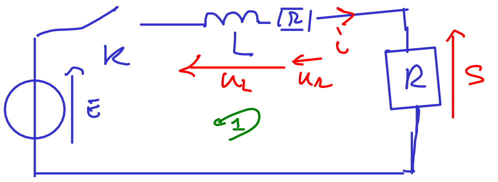
à $t = t_1$ $u = u_1 = E e^{-t_1/\tau} \Leftrightarrow e^{-t_1/\tau} = \frac{u_1}{E} \Leftrightarrow -t_1/\tau = \ln\left(\frac{u_1}{E}\right)$

$\Leftrightarrow t_1/\tau = \ln\left(\frac{E}{u_1}\right) \Leftrightarrow \tau = \frac{t_1}{\ln\left(\frac{E}{u_1}\right)} \Leftrightarrow \boxed{R = \frac{t_1}{C \ln\left(\frac{E}{u_1}\right)}}$

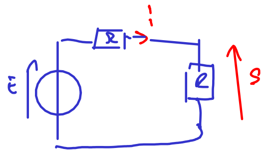
A.N $t_1 = 30 \times 60 = 1800$ s
$C = 10^{-6}$ F
$E = 6V$ $u_1 = 3,8V$

$\Rightarrow \boxed{R \simeq 4\ G\Omega}$

S2 - Circuit RL en régime transitoire



1/ Pour $t \to +\infty$: le régime stationnaire est établi donc le schéma équivalent est le suivant :



donc $\boxed{s(+\infty) = \frac{R}{R+r}E}$ (pont diviseur de tension)

2/ Équation différentielle vérifiée par $i(t)$: loi des mailles

①: $-E + u_r + u_L + s = 0$ avec $\begin{cases} s = Ri \text{ et } u_L = L\frac{di}{dt} \\ u_r = ri \end{cases}$ $\Rightarrow L\frac{di}{dt} + (R+r)i = E \iff \boxed{\frac{di}{dt} + \frac{i}{\tau} = \frac{E}{L}}$

avec $\boxed{\tau = \frac{L}{R+r}}$

Résolution :

* solution générale : $i(t) = \underbrace{i_H(t)}_{\text{sol homogène}} + \underbrace{i_p(t)}_{\text{sol particulière}}$ $\quad \begin{cases} i_H(t) = Ae^{-t/\tau} \\ i_p(t) = \frac{R}{R+r}E \end{cases}$

$\Rightarrow \forall t \geq 0, \; i(t) = Ae^{-t/\tau} + \frac{R}{R+r}E$

* Relation de continuité : l'intensité du courant électrique traversant une bobine idéale est continue.

En particulier, à $t=0$:

$i(0^+) = i(0^-)$ avec $\begin{cases} i(0^-) = 0 \quad (\text{interrupteur ouvert}) \\ i(0^+) = A + \frac{E}{R+r} \end{cases}$

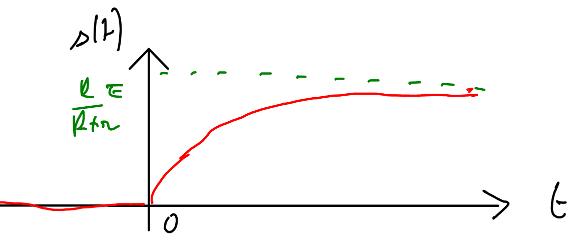
$\iff A + \frac{E}{R+r} = 0 \iff A = -\frac{E}{R+r}$

Donc : $\boxed{\forall t \geq 0, \; i(t) = \frac{E}{R+r}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)}$

$\frac{E}{R+r}$ homogène à une intensité ✓

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{t \to +\infty} i(t) = \frac{E}{R+r} \\ i(0) = 0 \end{array}\right\}$ cohérent ✓

3/ $s(t) = Ri(t) \Rightarrow \forall t \geq 0, \; s(t) = \frac{RE}{R+r}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$



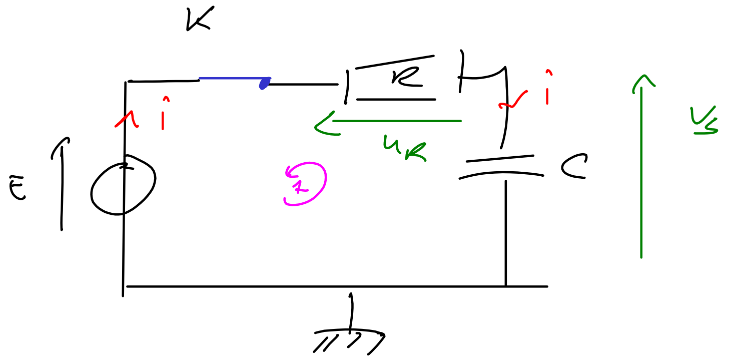
4/ Temps de montée à 5% t_m :

$s(t_m) = 95\% \, s(\infty) = 95\% \times s(\infty)$ avec $s(\infty) = \frac{RE}{R+r}$

$\Rightarrow s(\infty)\left(1 - e^{-t_m/\tau}\right) = \frac{95}{100} \times s(\infty) \iff e^{-t_m/\tau} = 1 - \frac{95}{100} = \frac{5}{100} \Rightarrow -t_m/\tau = \ln\left(\frac{5}{100}\right)$

$\Rightarrow t_m = \tau \times \ln(20)$ soit $\boxed{t_m \approx 3\tau}$ voir cours de S.I.

S3 - Rendement de la charge d'un condensateur.



$u_s(0^-) = 0$
K ouvert.

A $t=0$, on ferme K.

1/ Equa diff vérifiée par u_s pour $t>0$:

$\circlearrowleft$: $-E + u_s + u_R = 0$

avec $u_R = Ri$ et $i = C\dfrac{du_s}{dt}$

D'où : $u_s + RC\dfrac{du_s}{dt} = E$

On pose $\tau = RC$:

$$\boxed{\dot{u}_s + \frac{u_s}{\tau} = \frac{E}{\tau}} \quad (*)$$

2/ $i(t)$? $i(t) = C\dfrac{du_s}{dt}$ donc $u_s(t)$?

Résolvons (*) : pour $t > 0$

$u_s(t) = u_H(t) + u_p(t)$

avec $u_H(t) = Ae^{-t/\tau}$

$u_p(t) = E$

d'où $u_s(t) = E + Ae^{-t/\tau}$

Reste à déterminer A.

Continuité de la tension u_s aux bornes du condensateur. A $t=0$:

$u_s(0^+) = u_s(0^-)$

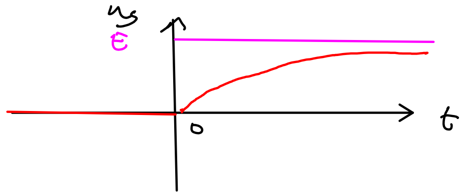
avec $u_s(0^-) = 0$ (C.I.)

$u_s(0^+) = E + A$

d'où $\underline{A = -E}$

Finalement :

$$\boxed{\begin{array}{l} \forall t \leq 0,\ u_s(t) = 0 \\ \forall t \geq 0\ \ u_s(t) = E\left(1 - e^{-t/\tau}\right) \end{array}}$$



$i(t)$?

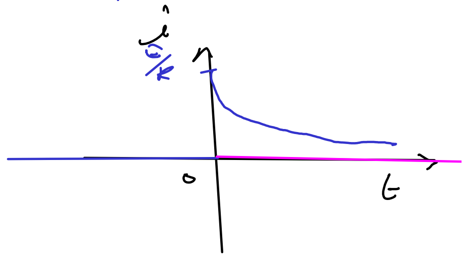
$i(t) = C\,\dot{u}_s \iff \forall\ t \leq 0,\ i = 0$

$\forall\ t \geq 0,\ i = CE \times -\frac{1}{\tau} e^{-t/\tau}$

$i(t) = \frac{E}{R} e^{-t/\tau}$

Finalement,

$$\boxed{\begin{array}{l} \forall\ t < 0,\ \ i(t) = 0 \\ \forall\ t > 0,\ \ i(t) = \frac{E}{R} e^{-t/\tau}. \end{array}}$$



3/ Energie fournie par le générateur :

$E_{g1} = \int_0^{\infty} P_{g,1}(t)\,dt$ avec $P_{g,1}(t) = E \times i$

d'où $E_{g1} = \int_0^{+\infty} E \times i(t)\,dt = E \int_0^{+\infty} i(t)\,dt$

$= E \times \int_0^{+\infty} \frac{E}{R} e^{-t/\tau} = \frac{E^2}{R} \times \left[\frac{e^{-t/\tau}}{-1/\tau} \right]_0^{+\infty}$

$= -\frac{E^2}{R} \times \tau\,[0 - 1] = \frac{E^2}{R} \times RC$

$$\boxed{E_{g1} = CE^2.}$$

Energie reçue par le condensateur pendant la charge:

$\Delta E_{c1} = E_{c1}(\infty) - E_{c1}(0)$ $\quad E_c = \frac{1}{2} C u^2$

avec $E_{c1}(\infty) = \frac{1}{2} C\,u(\infty)^2 = \frac{1}{2} CE^2$

$E_{c1}(0) = \frac{1}{2} C\,\underbrace{u(0)}_{0}{}^2 = 0$

$$\boxed{\Delta E_{c1} = \frac{1}{2} CE^2.}$$

Energie reçue par la résistance W_{J1}

Conservation de l'énergie : $E_{g1} = \Delta E_{c1} + W_{J1}$

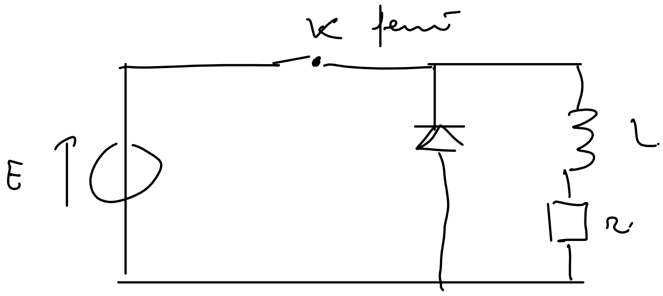
D'où $W_{J1} = E_{g1} - \Delta E_{c1} \implies \boxed{W_J = \frac{1}{2} CE^2}$

4/ Rendement de la charge : $\eta = \frac{\Delta E_{c1}}{E_{g1}}$

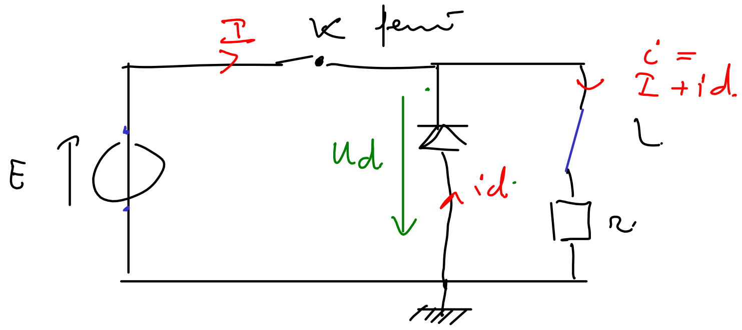
A.N. : $\eta = 50\%$ indépendamment de R.

S4. Protection d'un moteur

1/



$\Longleftrightarrow$ Régime stationnaire

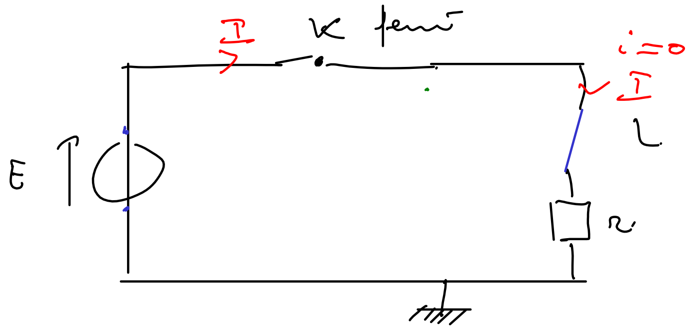


$u_d = -E$

$\Rightarrow u_d < u_s$

d'où

$\Longleftrightarrow$



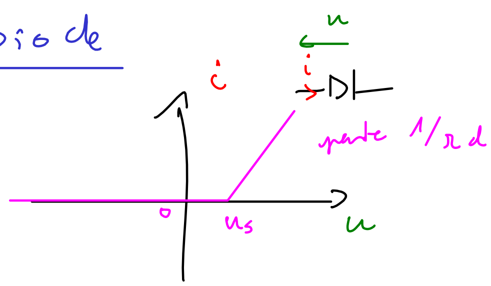
$\forall\, t < 0$:

$\boxed{i(t) = I}$

avec $E = RI$

$\boxed{I = \frac{E}{R}}$

2/ Diode

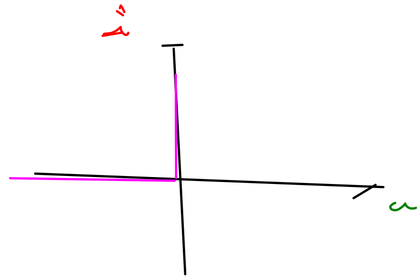


$\xrightarrow{\hspace{2cm}}$

diode plus idéal

$r_d \longrightarrow 0$

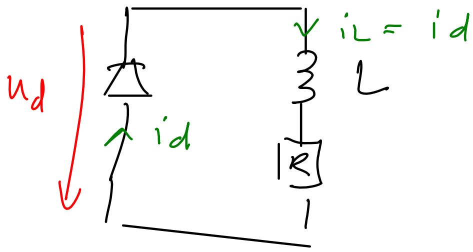
$u_s \longrightarrow 0$



Si $u < 0$, $—|\triangleright|—$ $\Longleftrightarrow$ $—/\ —$

$u > 0$, $—|\triangleright|—$ $\Longleftrightarrow$ $———$

2/1. à $t = 0^+$, $i_D = ?$



$\forall t > 0$

$i_D(t) = i_L(t)$

or $i_L(t)$ continu.

A $t = 0$, $i_L(0^+) = i_L(0^-)$

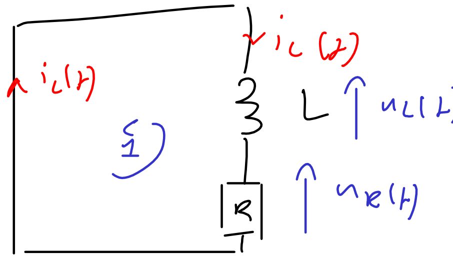
$= I$

d'où :

$$\underline{i_D(0^+) = I \neq 0}$$

La diode est passante.

2.2./ Tant que $i_L(t) \geq 0$:



$u_L(t) + u_R(t) = 0$

$\Leftrightarrow L\dfrac{di}{dt} + Ri = 0$

$\Leftrightarrow \boxed{\dfrac{di}{dt} + \dfrac{i}{\tau} = 0}$ Tant que $i_L \geq 0$

avec $\tau = \dfrac{L}{R}$

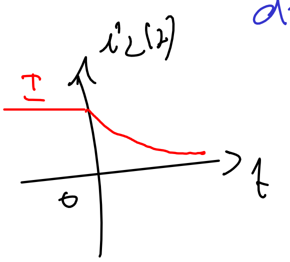
Solution : $i(t) = Ae^{-t/\tau}$

$A = ?$ Continuité du courant traversant la bobine. A $t = 0$:

$i_L(0^+) = i_L(0^-)$

avec $i_L(0^-) = I$, $i_L(0^+) = A$

$\Longrightarrow$ $\underline{A = I}$



d'où : $\forall t \geq 0$ et tq $i_L(t) \geq 0$:

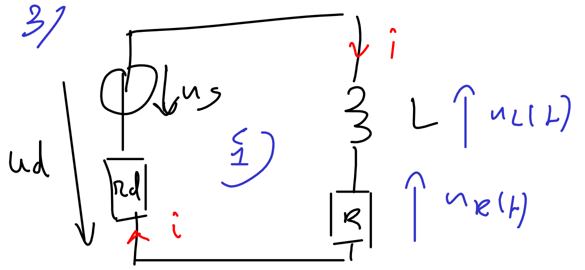
$$\boxed{i_L(t) = I e^{-t/\tau}}$$

$\forall t > 0$, $i_L(t) > 0$ donc :

$\forall t \geq 0$, $i_L(t) = I e^{-t/\tau}$.

($\forall t \geq 0$, la diode est passante).

3/



La diode est passante (voir 2.1.)

Equation d'évolution de $i_L(t)$?

$$u_s + r_d\, i + Ri + L\frac{di}{dt} = 0$$

$$\boxed{\frac{di}{dt} + \frac{i}{\tau'} = -\frac{u_s}{L}}$$

$\forall t \geq 0$ et tant que la diode est passante. i.e. $i \geq 0$.

avec $\tau' \doteq \dfrac{L}{R+R_d}$

Résolution : $i(t) = i_H(t) + i_p(t)$

avec $i_H(t) = A e^{-t/\tau'}$

$i_p = \dfrac{u_s}{L} \times \tau' = \dfrac{u_s}{R+R_d}$

$$\left.\right\} \quad i(t) = A e^{-t/\tau'} - \frac{u_s}{R+R_d}$$

$A = ?$ Continuité de i traversant la bobine. À $t = 0$:

$i(0^+) = i(0^-)$ avec $i(0^+) = A - \dfrac{u_s}{R+R_d}$

$i(0^-) = I$

D'où $A = I + \dfrac{u_s}{R+R_d}$

Finalement :

$\forall t \geq 0$, et tq $i(t) \geq 0$

$$\boxed{i(t) = \left(I + \frac{u_s}{R+R_d}\right) e^{-t/\tau'} - \frac{u_s}{R+R_d}} \quad (*)$$

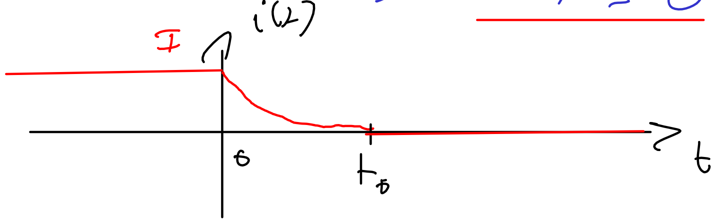
$\lim\limits_{t \to +\infty} i(t) = -\dfrac{u_s}{R+R_d} < 0 \implies \exists\, t_0$ tq $\underline{i(t_0) = 0}$

$(*)$ valable $\forall t \in [0, t_0]$,

$\forall t \geq t_0$: la diode est bloquée,

—▷|— $\Leftrightarrow$ —/ —

$\Longrightarrow \underline{i(t) = 0}$



Reste à déterminer t_0 :

$i(t_0) = 0$

$$i(t_0) = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{U_s}{R+r} + I\right) e^{-t_0/\tau'} - \frac{U_s}{R+r} = 0 \Leftrightarrow \boxed{t_0 = \tau' \ln\left(1 + \frac{(R+r)I}{U_s}\right)}$$