TD S11 - Régimes libres de l'oscillateur harmonique

D.Malka – MPSI 2018-2019 – Lycée Jeanne d'Albret

S1 – Trajectoires de phase

Interpréter les trajectoires de phase fig.1 et fig.2. On recherchera la nature du régime transitoire, l'état initial, l'état final, les valeurs maximales des signaux.

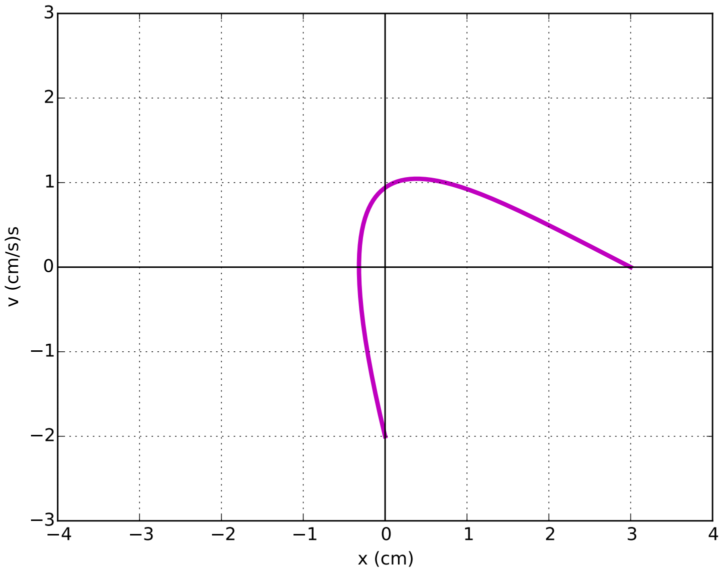

Figure 1 – Trajectoire de phase 1

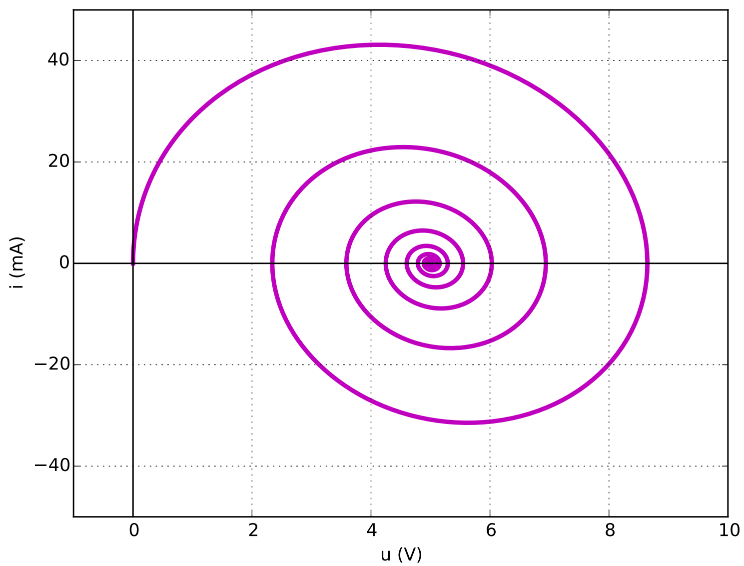

Figure 2 – Trajectoire de phase 2

S2 – Circuit « bouchon »

On s'intéresse à au régime libre du circuit fig.3. Initialement, l'interrupteur K est fermé. A $t = 0$, on ouvre l'interrupteur.

Les composants du circuit sont tels que : $R = 100\,\Omega$, $L = 1{,}00\,\text{H}$ et $C = 1{,}00\,\mu\text{F}$.

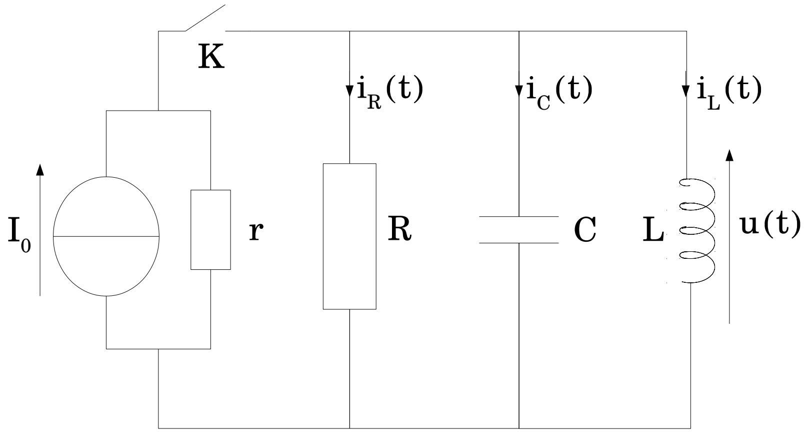

Figure 3 – Circuit « bouchon »

1. Justifier qu'à $t = 0^-$, $i_L(0^-) = I_0$ et $u(0^-) = 0$.
2. Déterminer les valeurs de i_L et u en régime établi après ouverture de l'interrupteur.
3. Déterminer l'équation d'évolution de l'intensité électrique $i_L(t)$ pour $t \geq 0$. On posera :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{et} \quad Q = RC\omega_0$$

4. Pour quelle valeur limite de Q n'y a-t-il plus dissipation de l'énergie du circuit ? Interpréter.
5. Déterminer l'expression de $i_L(t)$ pour $t \geq 0$.
6. Montrer que $i_L(t) \approx I_0 e^{-\left(\frac{1}{\tau}-\Omega\right)t}$. Estimer alors numériquement la durée du régime transitoire.

S3 – Interprétation énergétique du facteur de qualité d'un oscillateur

On considère le circuit RLC-série (fig.4) soumis à l'échelon de tension :

$$e(t) = \begin{cases} E & \text{si} \quad t < 0 \\ 0 & \text{si} \quad t \geq 0 \end{cases}$$

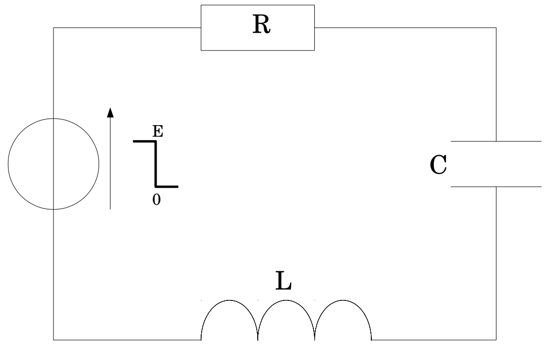

Figure 4 – Circuit RLC série. $R = 100\,\Omega$, $L = 1{,}00\,\text{H}$ et $C = 1{,}00\,\mu\text{F}$.

1. Pour $t \geq 0$, l'équation différentielle vérifiée par la tension $u_C(t)$ aux bornes du condensateur s'écrit :

$$\ddot{u}_C + \frac{\omega_0}{Q}\dot{u}_C + \omega_0^2 u_C = 0$$

avec $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ et $Q = \dfrac{L\omega_0}{R}$.

Donner le sens physique de chaque terme de l'équation.

2. La tension peut s'écrire $u_C(t)$ s'écrit :

$$u_C(t) = e^{-\frac{t}{\tau}}\left(A\cos\omega t + B\sin\omega t\right)$$

avec $\omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$ et $\tau = \frac{2Q}{\omega_0}$.

2.1 Justifier la forme proposée pour $u_C(t)$.
2.2 Déterminer les valeurs de A et B.
2.3 Montrer qu'on peut faire l'approximation :

$$u_C(t) \approx Ee^{-\frac{t}{\tau}}\cos(\omega_0 t) \quad \text{et} \quad i(t) \approx -\omega_0 CEe^{-\frac{t}{\tau}}\sin(\omega_0 t)$$

On conserve cette approximation pour toute la suite du problème.

3. La figure 5, représente l'évolution de l'énergie électrique totale, de l'énergie électrique stockée dans le condensateur et de l'énergie électrique stockée dans la bobine.

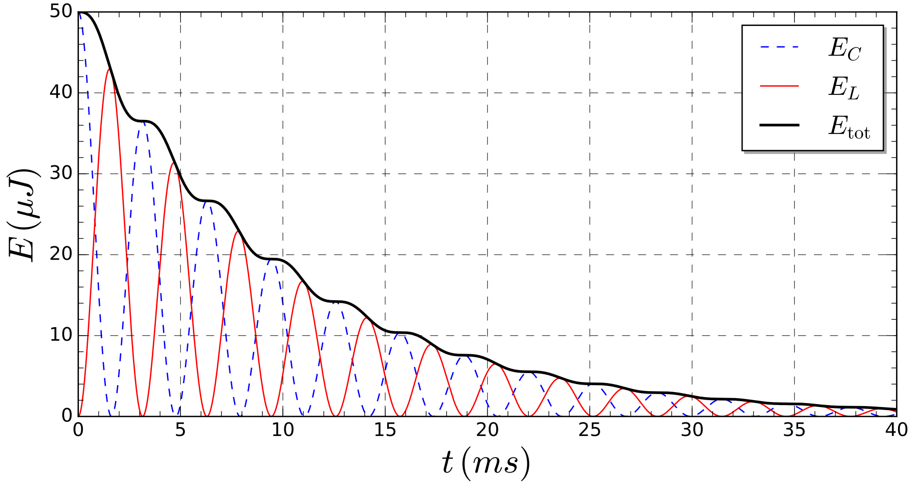

FIGURE 5 – Evolution de l'énergie du circuit RLC. E_C est l'énergie stockée dans le condensateur, E_L l'énergie stockée dans la bobine, E_{tot} l'énergie électrique totale.

3.1 Discuter le graphe fig.5.
3.2 Exprimer l'énergie électrique $\mathcal{E}(t)$ de l'oscillateur à l'instant t.
3.3 Montrer que $\forall t$, $\dfrac{1}{Q} \sim \dfrac{\Delta\mathcal{E}}{\mathcal{E}}$ où $\Delta\mathcal{E} = |\mathcal{E}(t+T) - \mathcal{E}(t)|$ avec T la pseudo-période du régime transitoire.
On donne le développement limité : $e^x \approx 1 + x$ si $x \ll 1$.
3.4 Commenter.

S4 – Vibrations libres d'une branche

On considère une branche de longueur L, de largeur b, d'épaisseur h. Cette branche est encastrée dans une branche plus épaisse ou dans le tronc d'un arbre. On cherche à modéliser le mouvement libre de cette branche. Lorsque son extrémité libre est défléchie d'une valeur y par dans la direction $\vec{u}_y$ rapport à sa position d'équilibre, elle subit la force $\vec{F} = -\dfrac{Ebh^3}{4L^3}y\vec{u}_y$ avec $E \sim 10\,\text{GPa}$ le module d'élasticité. On néglige le poids.

1. Proposer une modélisation de la branche par un système masse-ressort. Schématiser le modèle et évaluer numériquement ses paramètres.
2. On suppose que l'amortissement de la branche résulte de la force de frottement exercée par l'air. Dans le cadre du modèle précédent, cette force s'écrit $\vec{f} = -\dfrac{1}{6}C_D\rho_a v\vec{v}$ où ρ_a est la masse volumique de l'air et $C_D \approx 0{,}9$ le coefficient de traînée. Écrire l'équation différentielle vérifiée par $y(t)$.
3. La résolution numérique de cette équation différentielle aboutit au graphe fig.6. Commenter. Que penser du modèle ?

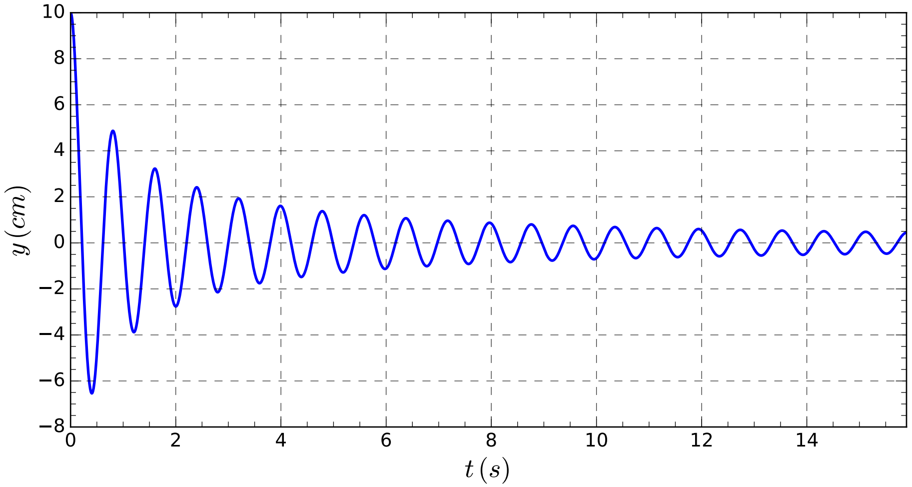

FIGURE 6 – Amplitude de vibration libre de la branche d'arbre