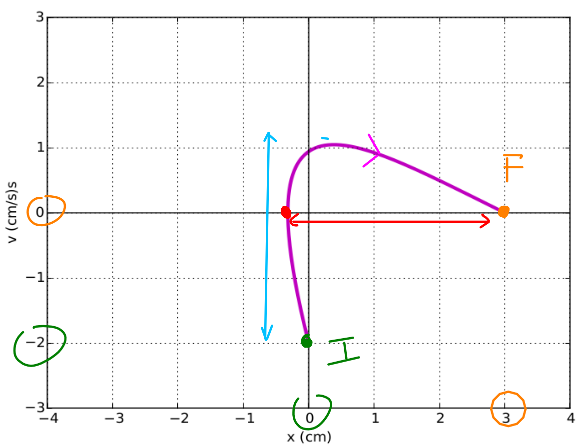
TD S11 — Corrigé

S1 - Trajectoires de phases



Régime apériodique.

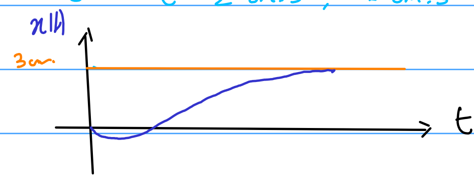
État initial : $I(x=0,\ v=-2\ cm/s)$

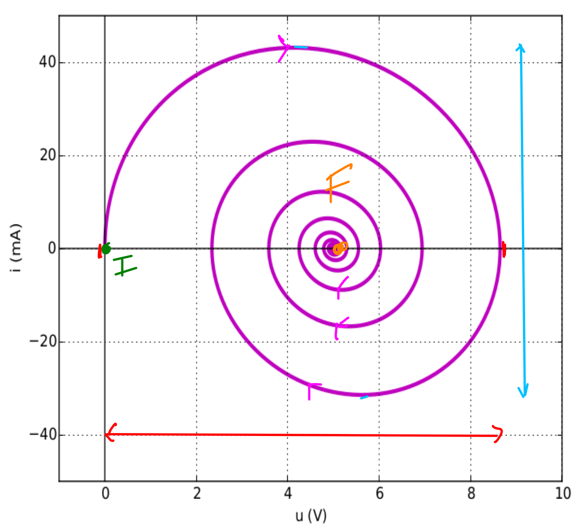
État final : $F(x=3\ cm,\ v=0\ cm/s)$

Amplitude :

$x \in [-0{,}3\ cm,\ 3\ cm]$

$v \in [-2\ cm.s^{-1},\ 1\ cm.s^{-1}]$





Régime pseudo-périodique ~ 5 oscillations

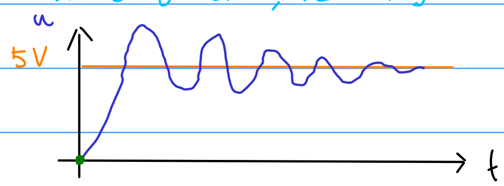
État initial : $I(0,0)$

État final : $F(5V,\ 0)$

Amplitudes :

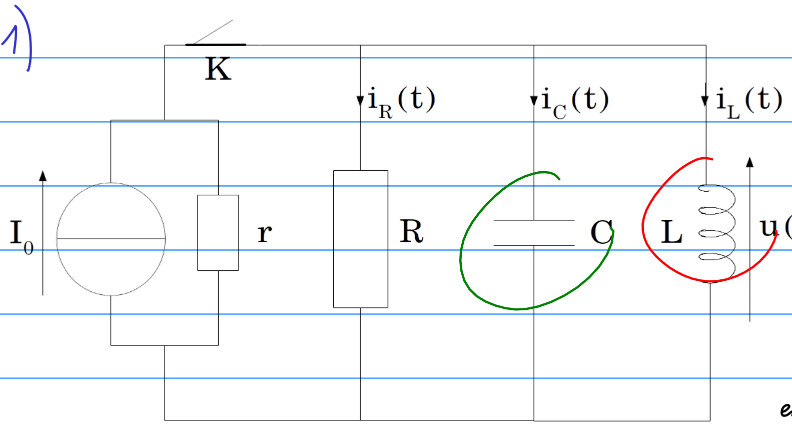
$u \in [0,\ 8{,}5V]$

$i \in [-32\ mA,\ 42\ mA]$

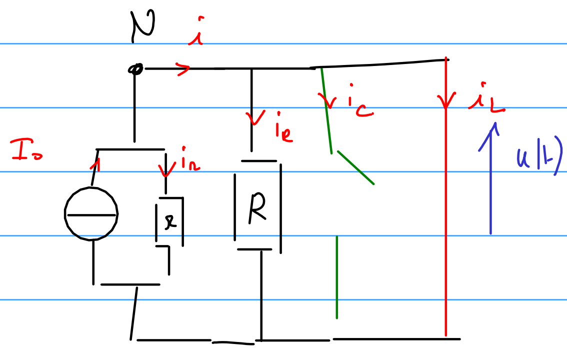


S2- Circuit bouchon

1)



$\Longleftrightarrow$ à $t=0^-$, le régime est stationnaire.



Sur le schéma équivalent, on lit :

$i_C(0^-) = 0$

$\boxed{u(0^-) = 0}$

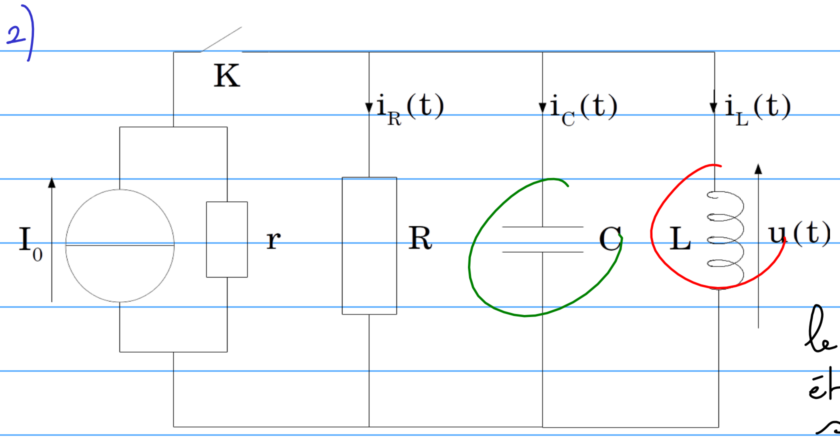
$i_R(0^-) = \frac{u(0^-)}{R} = 0$

$i_r(0^-) = \frac{u(0^-)}{r} = 0$

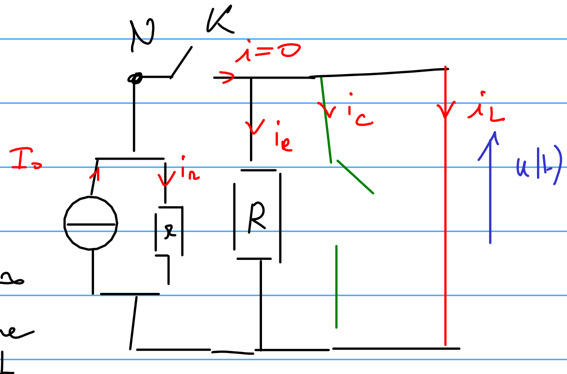
loi des noeuds en N : $i_r(0^-) + i_R(0^-) + i_C(0^-) + i_L(0^-) - I_0 = 0$

$\Rightarrow \boxed{i_L(0^-) = I_0}$ (plus rapidement, la bobine court-circuite les autres dipôles)

2)



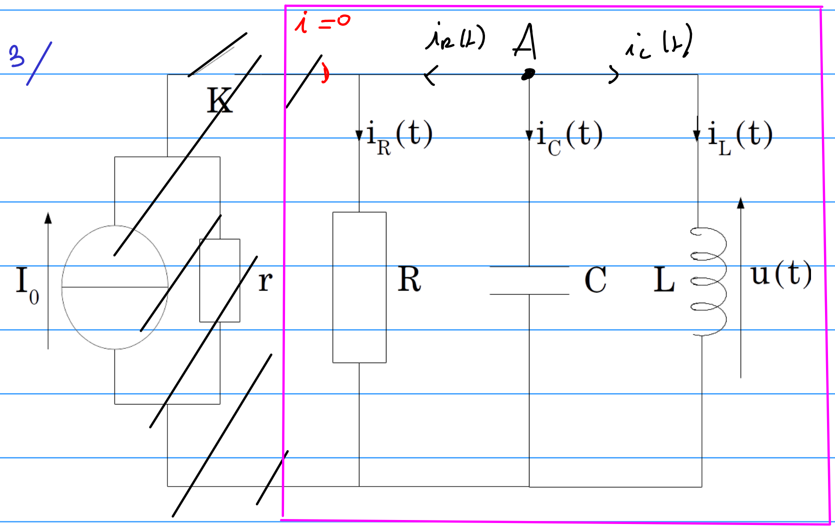
$\Leftrightarrow$ $t \to +\infty$ le régime établi est stationnaire.



Le m̂ raisonnement que précédemment avec K ouvert donc $i = 0$ donne :

$$\boxed{\begin{array}{l} u_\infty = 0 \\ i_\infty = 0 \end{array}}$$

3/



Le générateur est déconnecté du circuit.

Equat° diff. vérifiée par $i_L(t)$?

Lois de Kirchhoff + lois de fonctionnement.

Ici, loi des noeuds en A :

$i_R + i_C + i_L = 0$ (*)

avec $\left\{ \begin{array}{l} i_R = \frac{u}{R} \\ i_C = C\dot{u} \\ u = L\frac{di_L}{dt} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} i_R = \frac{L}{R}\frac{di_L}{dt} \\ i_C = LC\frac{d^2 i_L}{dt^2} \\ u = L\frac{di}{dt} \end{array} \right.$

(*) devient : $LC\frac{d^2 i_L}{dt^2} + \frac{L}{R}\frac{di_L}{dt} + i_L = 0$

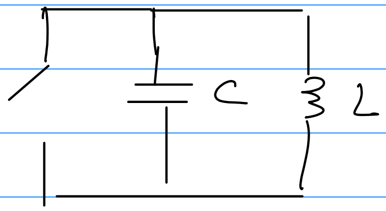
$\Leftrightarrow \boxed{\frac{d^2 i_L}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{di_L}{dt} + \omega_0^2 i_L = 0}$ avec $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}},\ Q = RC\omega_0}$

4/ Dissipation énergétique ?

$$\frac{d^2 i_L}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{di_L}{dt} + \omega_0^2 i_L = 0 \quad \text{avec } \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}, \; Q = RC\omega_0$$

Dissipation d'énergie par effet Joule

Ce terme $\to 0$ si $Q \to +\infty$ soit avec $Q = RC\omega_0$ et en supposant C et $L \neq 0$ et finies, $R \to +\infty$. Dans le circuit RLC parallèle, cela revient à enlever la résistance R.



Dans ce modèle, il n'y a alors plus dissipation d'énergie. Va

5/ $i_L(t)$? Il faut résoudre : $\frac{d^2 i_L}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{di_L}{dt} + \omega_0^2 i_L = 0$

Equation caractéristique $r^2 + \frac{\omega_0}{Q} r + \omega_0^2 = 0$

$\Delta = \left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2 - 4\omega_0^2 = 4\omega_0^2\left(\frac{1}{4Q^2} - 1\right)$ avec $Q = RC\omega_0 = R \times \sqrt{\frac{C}{L}}$

L'énoncé donne $R = 100\,\Omega$, $C = 10^{-6}\,F$ et $L = 1\,H \Rightarrow Q = 0{,}1$.

Donc $\Delta > 0$ et le régime est apériodique.

$$r_\pm = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\Delta} = \underbrace{-\frac{\omega_0}{2Q}}_{-1/\tau} \pm \underbrace{\omega_0\sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1}}_{\Omega}$$

$r_\pm = -1/\tau \pm \Omega$.

La solution générale est de la forme : $i_L(t) = e^{-t/\tau}\left(A\,\mathrm{ch}(\Omega t) + B\,\mathrm{sh}(\Omega t)\right)$

Les constantes d'intégration a et b s'obtiennent via les relations de continuité :

① i_L est l'intensité du courant traversant la bobine donc est continue

② u est la tension aux bornes du condensateur donc est continue.

En particulier, à $t = 0$:

$i_L(0^+) = i_L(0^-) \Rightarrow \underline{A = I_0}$

$u(0^+) = u(0^-)$ avec $u = L\frac{di_L}{dt} = -\frac{1}{\tau}e^{-t/\tau}\left(A\,ch(\Omega t) + B\,sh(\Omega t)\right)$
$+\ \Omega e^{-t/\tau}\left(A\,sh(\Omega t) + B\,ch(\Omega t)\right)$

$\Rightarrow -\frac{I_0}{\tau} + B\Omega = 0 \Rightarrow \boxed{\overbrace{B}^{I} = \frac{\overbrace{I_0}^{I}}{\underbrace{\Omega}_{T^{-1}}\underbrace{\tau}_{T}}}$ Vu

Finalement : $\boxed{i_L(t) = I_0 e^{-t/\tau}\left(ch(\Omega t) + \frac{1}{\Omega\tau}\,sh(\Omega t)\right)}$

6/ Montrons que $i_L(t) \approx I_0 e^{-(1/\tau - \Omega)t}$.

On cherche les termes éventuellement dominant dans $i_L(t)$.

$ch(\Omega t)$ et $sh(\Omega t)$ sont du m̄ ordre de grandeur. Evaluons le préfacteur $\frac{1}{\Omega\tau}$.

avec $Q = 0,1$

$$\left.\begin{aligned} \Omega &= \omega_0\sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1} \approx \omega_0\sqrt{24} \approx \omega_0\sqrt{25} = 5\,\omega_0 \\ \tau &= \frac{2Q}{\omega_0} \approx \frac{0,2}{\omega_0} \end{aligned}\right\}\ \frac{1}{\Omega\tau} \approx \frac{1}{5\omega_0 \times \frac{0,2}{\omega_0}} \approx 1.$$

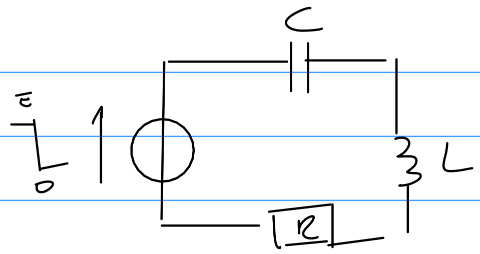
D'où : $i_L(t) \approx I_0 e^{-t/\tau}\left(\underbrace{ch(\Omega t) + sh(\Omega t)}_{e^{\Omega t}}\right)$

$\Rightarrow \boxed{i_L(t) = I_0 e^{-(1/\tau - \Omega)t}}$ Vu : $i_L(0^-) = I_0$
$i_{L\infty} = 0.$

La décroissance du courant est quasi-exponentielle avec une durée de relaxation $\sim 5t_1$ avec $\frac{1}{t_1} = 1/\tau - \Omega$

$\Rightarrow t_1 = \frac{1}{1/\tau - \Omega} = \frac{1}{\frac{\omega_0}{2Q} - \omega_0\sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1}}$. A.N. $\omega_0 \approx \frac{1}{\sqrt{LC}} \approx 10^3\ rad.s^{-1}$
$Q = 0,1$
$t_1 \approx 10\ ms.$

S3 – Interprétation énergétique du facteur de qualité



1) $\ddot{u}_C + \frac{\omega_0}{Q}\dot{u}_C + \omega_0^2 u_C = 0$

terme inertiel — dissipation d'énergie par effet Joule — terme de rappel

2) $u_C(t) = e^{-t/\tau}\left(A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)\right)$, $\tau = \frac{2Q}{\omega_0}$, $\omega = \omega_0\sqrt{1-1/4Q^2}$

2.1) $u_C(t)$: régime pseudo-périodique.

Cohérent car $Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} \sim 10^{-2}\times\sqrt{\frac{1}{10^{-6}}} \sim 10 > 1/2$

2.2) A et B ? Relat° de continuité.

Continuité de la tension $u_C(t)$ aux bornes du condensateur.

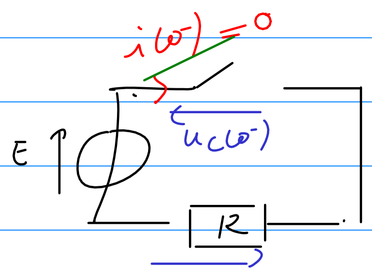
Continuité du courant traversant la bobine.

En particulier à $t=0$:

$$\begin{cases} u_C(0^+) = u_C(0^-) & (1) \\ i(0^+) = i(0^-) & (2) \end{cases}$$

(1) $A = \underbrace{u_C(0^-)}_{?}$

A $t=0^-$, le régime stationnaire :



$u_L(0^-) = 0 \implies \underline{u_C(0^-) = E}$

(1) $\underline{A = E}$

(2) $\underbrace{i(0^+)}_{?} = i(0^-) = 0.$

$i(t) = C\dot{u}_C$ car traverse le condensateur.

$$= -\frac{1}{\tau} C e^{-t/\tau}(A\cos\omega t + B\sin\omega t) + C\omega e^{-t/\tau}(-A\sin\omega t + B\cos\omega t)$$

$$\Rightarrow i(0^+) = -\frac{C}{\tau}A + CB\omega$$

D'où (2) donne $\underline{B = \frac{E}{\omega\tau}}$

D'où : $\boxed{u_C(t) = E e^{-t/\tau}\left(\cos\omega t + \frac{1}{\omega\tau}\sin\omega t\right)}$

2.3) Mq $\omega \simeq \omega_0$ et $\frac{1}{\omega\tau} \ll 1$.

$\omega = \omega_0\sqrt{1 - 1/4Q^2}$ $\quad Q = 10 \Rightarrow \omega = 0,999\,\omega_0 \simeq \omega_0$

$$\frac{1}{\omega\tau} \simeq \frac{1}{\omega_0\tau} = \frac{1}{\omega_0}\times\frac{\omega_0}{2Q} \simeq \frac{1}{2Q} = \frac{1}{20} \ll 1$$

D'où $\boxed{u_C(t) \simeq E e^{-t/\tau}\cos(\omega_0 t)}$

$$i(t) = -\frac{1}{\tau} C e^{-t/\tau}\left(E\cos\omega t + \underbrace{\cancel{\frac{E}{\omega\tau}}}_{\ll E}\sin\omega t\right) + C\omega e^{-t/\tau}\left(-E\sin\omega t + \underbrace{\cancel{\frac{E}{\omega\tau}}}_{\ll E}\cos\omega t\right)$$

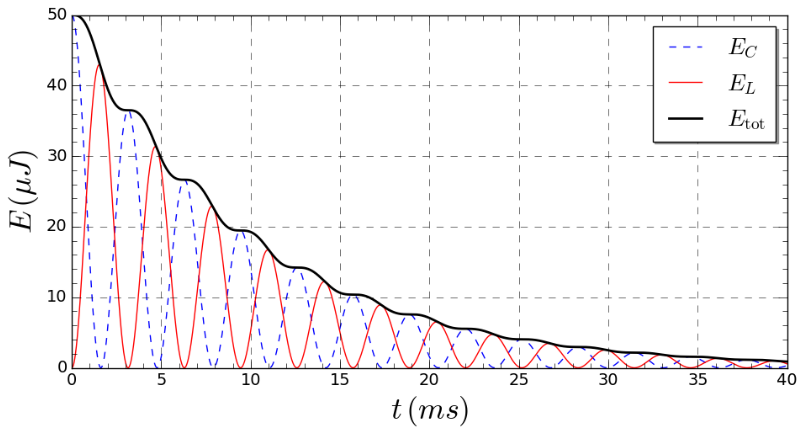
$$i(t) \simeq CE e^{-t/\tau}\left(-\frac{1}{\tau}\cos\omega_0 t - \omega_0\sin\omega_0 t\right)$$

Or $\omega_0\tau \gg 1 \Rightarrow \omega_0 \gg 1/\tau$

$$\Rightarrow \boxed{i(t) = -\omega_0 C E e^{-t/\tau}\sin(\omega_0 t)}$$

Approx $\omega \simeq \omega_0$ et $\omega\tau \gg 1 \Leftrightarrow Q \gg 1$.

3) 1)



① Etat ↘ par dissipation par effet Joule.

② Echange $T/2$ périodique de l'énergie entre le condensateur et la bobine.

3.2.) $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_c(t) + \mathcal{E}_L(t)$,

$$\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2} C u_c^2(t) + \frac{1}{2} L i^2(t)$$

avec $u_c(t) = E e^{-t/\tau} \cos(\omega_0 t)$

$i(t) = - \omega_0 C E e^{-t/\tau} \sin(\omega_0 t)$

$$\Rightarrow \mathcal{E}(t) \approx \frac{1}{2} C E^2 e^{-2t/\tau} \left(\cos^2(\omega_0 t) + \underbrace{LC\omega_0^2}_{=1} \sin^2(\omega_0 t) \right)$$

$$\boxed{\mathcal{E}(t) \approx \frac{1}{2} C E^2 e^{-2t/\tau}.}$$

cohérent avec l'approximation $\varphi \nearrow$.

3.3) $\frac{\Delta \mathcal{E}}{\mathcal{E}} = ?$ $\Delta \mathcal{E}$?

$$\Delta \mathcal{E} = |\mathcal{E}(t+T) - \mathcal{E}(t)| = \left| \frac{1}{2} C E^2 e^{-2t/\tau} e^{-2T/\tau} - \frac{1}{2} C E^2 e^{-2t/\tau} \right|$$

$$= \frac{1}{2} C E^2 \left| e^{-2T/\tau} - 1 \right| e^{-2t/\tau}$$

$$= \mathcal{E}(t) \left| e^{-2T/\tau} - 1 \right|$$

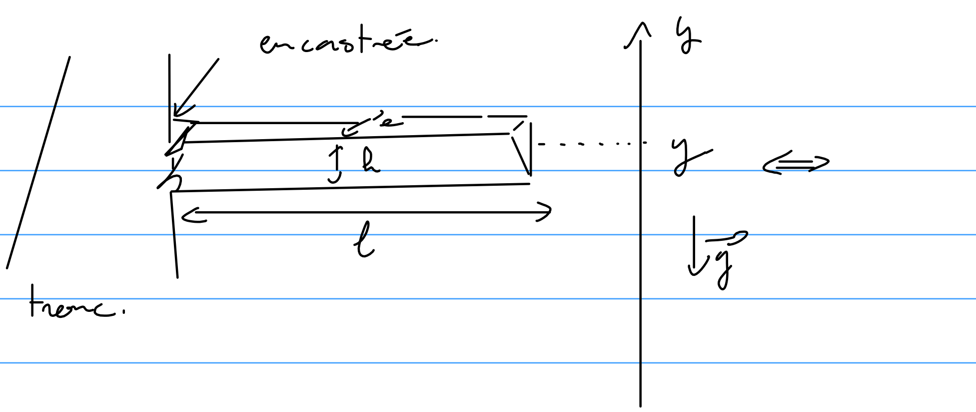
$$\varphi \gg 1 \Leftrightarrow T \ll \tau \Leftrightarrow T/\tau \ll 1 \Rightarrow e^{-2T/\tau} \approx 1 - 2T/\tau$$

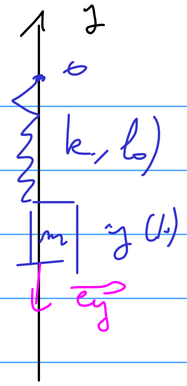
$$\Rightarrow \Delta \mathcal{E} = \mathcal{E} \times \frac{2T}{\tau} \Leftrightarrow \frac{\Delta \mathcal{E}}{\mathcal{E}} = \frac{2T}{\tau} \approx \frac{2T_0}{\tau}$$

or $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ et $\tau = \frac{2\varphi}{\omega_0}$ $\Rightarrow \boxed{\frac{\Delta \mathcal{E}}{\mathcal{E}} = \frac{2\pi}{\varphi}.}$

4) φ est une mesure de la perte relative d'énergie de l'oscillateur harmonique sur une période.

S4 - Vibrations libres d'une branche.





$$\vec{F} = -\frac{Ebh^3}{4L^3}\, y\, \vec{e_y} = -k(y-l_0)\vec{e_y} \quad \text{avec } k = \frac{Ebh^3}{4L^3} \text{ et } l_0 = 0$$

$m = ?$ masse de la branche

$m = \rho V$ (fine)

$L = 1$ m
$h = 1$ cm
$e = 1$ cm

ρ bois $\sim 5{,}0\times10^2$ kg.m^{-3}

$\Rightarrow m \approx 5\times10^2 \times 10^{-4} \times 1 \sim 50$ g

② $\vec{f} = -\frac{1}{6} C_D \rho_a v \vec{v}$ avec $v = |\vec{v}|$ et $C_D = 0,9$.

$= -\frac{1}{6} C_D \rho_a |\dot{y}| \dot{y}\, \vec{e_y}$ $\quad \rho_a \sim 1$ g

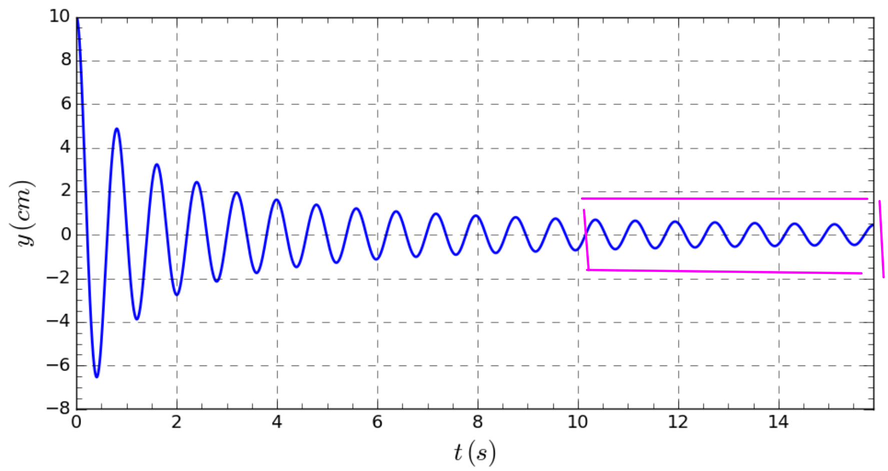
Bilan de quantité de mvt appliqué à la branche :

$$\boxed{m\ddot{y} = -ky - \frac{1}{6} C_D \rho_a |\dot{y}| \dot{y}}$$

Equat° non linéaire.

$\neq$ OH

④



Début : allure de régime pseudo-périodique.

Fin : décroissance très (trop!) lente.

→ Modèle de frottement à revoir ?

→ Dissipation interne ?

→ couplage avec l'arbre ?