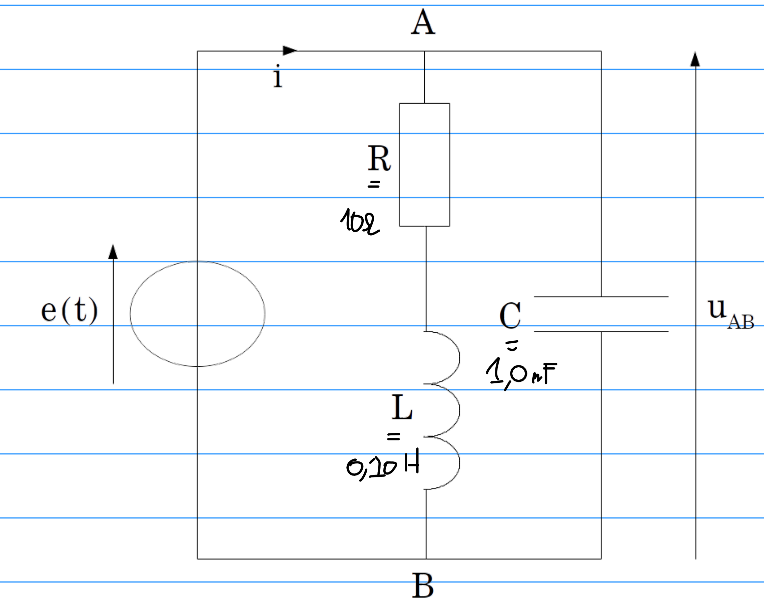
TD S13 - Corrigé

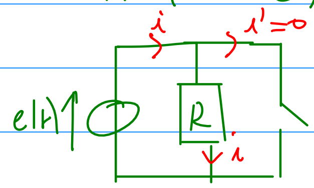
S1- Circuit anti-résonnant



1) $e(t) = E\cos\omega t$ et le circuit est linéaire donc $i(t) = i_m\cos(\omega t + \varphi)$

2) Amplitude i_m du courant à H.F. et B.F. On raisonne sur les circuit équivalent.

B.F. $(\omega \to 0)$

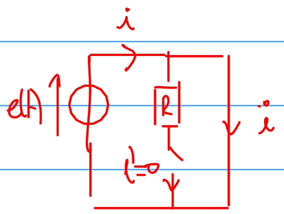


d'où

$$i(t) = \frac{e(t)}{R}$$

$$\Rightarrow \boxed{i_{m_{BF}} = \frac{E}{R}}$$

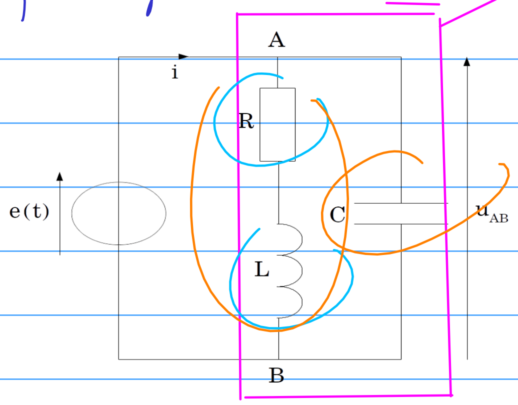
H.F. $(\omega \to +\infty)$



Si on note $r \to 0$ la résistance des fils idéaux alors

$i(t) = \dfrac{e(t)}{r} \Rightarrow i_{m_{HF}} = \dfrac{E}{r}$. Or $r \to 0$ donc $\boxed{i_m \to +\infty}$

3) Impédance de AB dipôle AB



R et L en série : $\underline{Z_1} = R + jL\omega$

$\underline{Z_1}$ et C en parallèle :

$$\frac{1}{\underline{Z_{AB}}} = \frac{1}{\underline{Z_1}} + jC\omega \quad \text{soit :}$$

$$\frac{1}{\underline{Z_{AB}}} = \frac{1}{R + jL\omega} + jC\omega = \frac{1 + jC\omega(R + jL\omega)}{R + jL\omega} = \frac{\overset{\phi}{1} - \overset{T^2 \, T^{-2}}{LC\omega^2} + \overset{T}{jRC\omega}^{\,T^{-1}}}{R + jL\omega}$$

$[Z]^{-1}$ $\quad$ $[Z]$ $\quad$ ϕ Homogène !

$$\Leftrightarrow \boxed{\underline{Z_{AB}} = \frac{R + jL\omega}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}}$$

4) $$\boxed{Z^2 = \underline{Z_{AB}}\,\underline{Z_{AB}}^* = \frac{R^2 + L^2\omega^2}{(1 - LC\omega^2)^2 + R^2C^2\omega^2}}$$

5) On admet que $Z(\omega)$ est maximale pour $\omega = \omega_0'$ telle que :

$$\omega_0'^2 = \omega_0^2 \left(\sqrt{1+2x} - x\right) \quad \text{avec } x = R^2 \frac{C}{L} \text{ et } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

6) $x = R^2 \dfrac{C}{L} = 10^2 \times \dfrac{10^{-9}}{10^{-1}} = 10^{-6} \ll 1$ donc :

$$\omega_0'^2 \approx \omega_0^2 \left(\sqrt{1+\underbrace{\cancel{2x}}_{\ll 1}} - \underbrace{\cancel{x}}_{\ll 1}\right) \implies \boxed{\omega_0' \approx \omega_0}$$

Estimons l'erreur $e(x)$ commise lorsqu'on opère cette approximation.

$$e(x) = \frac{\omega_0' - \omega_0}{\omega_0}$$

avec $\omega_0' = \omega_0 \left(\sqrt{1+2x} - x\right)^{1/2}$

A l'ordre 1 en $x \ll 1$: $\omega_0' \approx \omega_0 \left(1 + x - x\right)^{1/2} \approx \omega_0$

→ l'erreur est au moins d'ordre 2 en x.

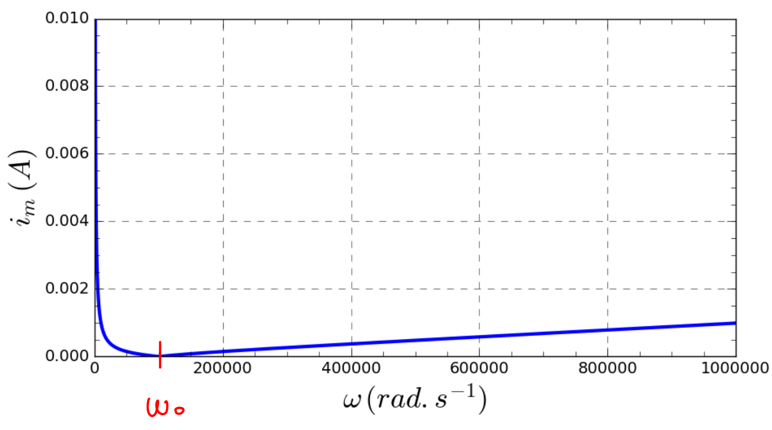
A l'ordre 2 en $x \ll 1$:

$$\begin{aligned}\omega_0' &= \omega_0 \left(1 + x + \frac{1}{8} \times (2x)^2 + o(x^2) - x\right)^{1/2} \\ &= \omega_0 \left(1 + \frac{1}{2} x^2 + o(x^2)\right)^{1/2} \\ &= \omega_0 \left(1 + \frac{x^2}{4} + o(x^2)\right)\end{aligned}$$

D'où $\boxed{e(x) = \dfrac{x^2}{4} + o(x^2)} \sim 5 \times 10^{-13}$! Excellente approximation !

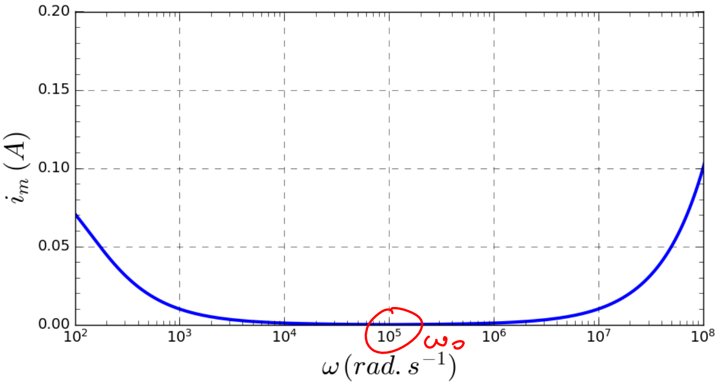
7) Par def : $\underline{i}(t) = \dfrac{\underline{e}(t)}{\underline{Z}_{AB}} \implies \boxed{i_m = \dfrac{E}{Z}}$

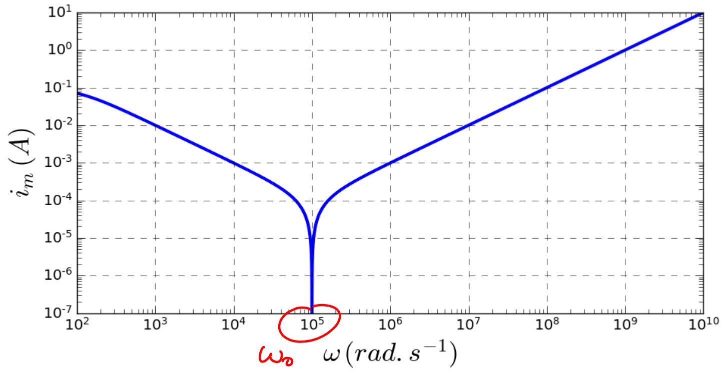
On sait que $\begin{cases} i_m(\omega = 0) = \dfrac{E}{R} \\ i_m(\omega \to +\infty) = +\infty \\ Z(\omega_0' \approx \omega_0) \text{ max donc } i_m(\omega_0' \approx \omega_0) \text{ min d'où l'allure :} \end{cases}$



On a choisit $E = 1$

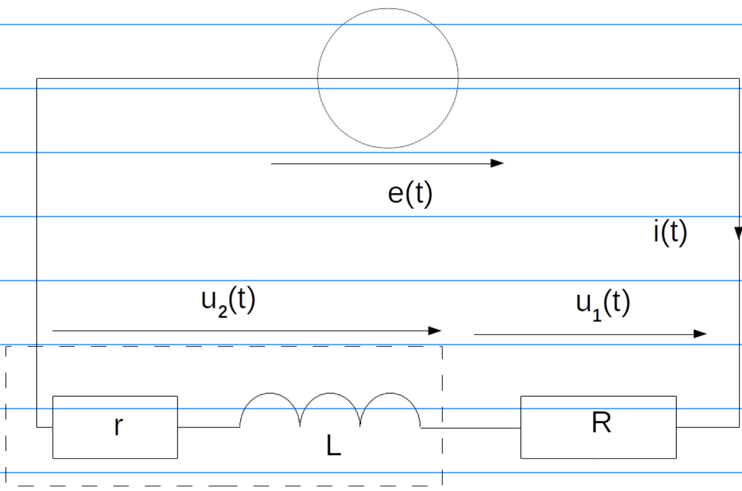
Pas très lisible, il vaut mieux passer en échelle logarithmique.





Antirésonance en ω_0 !

S2 - Mesure des caractéristiques d'une bobine.



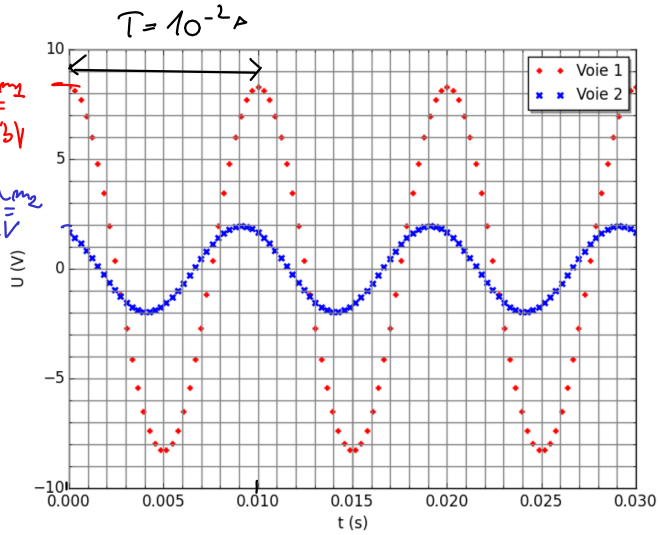
1) Bobine : $\underline{Z}_b = r + jL\omega \Rightarrow Z_b = |\underline{Z}_b| = \sqrt{r^2 + (L\omega^2)}$

$\underline{Z}_R = R \Rightarrow Z_R = |\underline{Z}_R| = R$

2)

$U_{m_1} = 8{,}3V$

$U_{m_2} = 2V$



$r = 10\,\Omega$ et $R = 50\,\Omega$ connues.

On cherche L.

Comme $\underline{Z}_b = r + jL\omega$, on peut déterminer L via Z_b.

Quelle rapport avec les amplitude u_{m_1} et u_{m_2} de $u_1(t)$ et $u_2(t)$?

Il est clair que comme $\underline{u_1} = R\underline{i}$ et $\underline{u_2} = \underline{Z}_b\,\underline{i}$, u_{m_1} et u_{m_2}

sont des fonctions de $\underline{Z_b}$ et R donc de L.

On a : $\begin{cases} \underline{u_1} = R\underline{i} \Rightarrow U_{m1} = R\,i \quad (1) \\ \underline{u_2} = \underline{Z_b}\,\underline{i} \Rightarrow U_{m2} = Z_b\, i \quad (2) \end{cases}$ avec U_{m1} et U_{m2} évaluable via les graphes

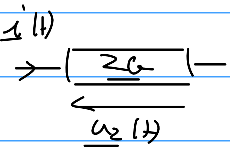
(2)/(1) donne : $\dfrac{Z_b}{R} = \dfrac{U_{m2}}{U_{m1}} = \alpha$

$\Leftrightarrow Z_b = \alpha R \Leftrightarrow \sqrt{r^2 + L^2\omega^2} = \alpha R \Leftrightarrow r^2 + L^2\omega^2 = \alpha^2 R^2$

$\Leftrightarrow L^2\omega^2 = \alpha^2 R^2 - r^2 \Leftrightarrow L = \dfrac{\sqrt{\alpha^2R^2 - r^2}}{\omega} \Leftrightarrow \boxed{L = T\,\dfrac{\sqrt{\alpha^2R^2 - r^2}}{2\pi}}$

A.N. : $U_{m1} = 2\ V$, $U_{m2} = 8{,}3\ V$, $R = 50\ \Omega$, $r = 10\ \Omega$,
$T = 10^{-2}\ s$ $\Rightarrow$ $\underline{L \simeq 10{,}7\ mH}$

3) Soit φ le déphasage de $u_2(t)$ par rapport à $u_1(t)$.
Comme $u_1(t) = R\, i(t)$ avec R réel $u_1(t)$ et $i(t)$ sont en phase. Donc φ est aussi le déphasage de $u_2(t)$ par rapport à $i(t)$:

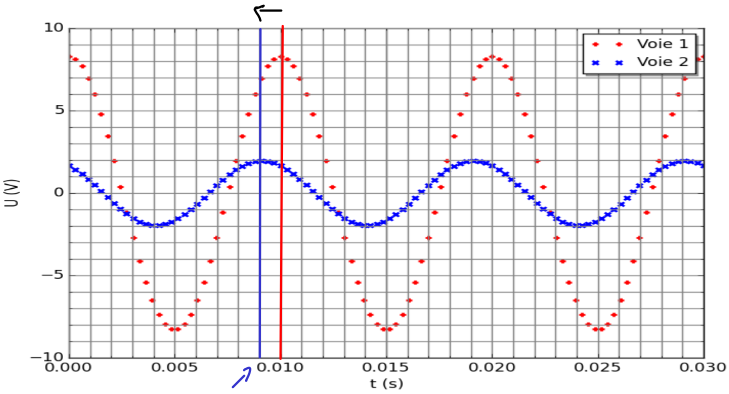


Or $\underline{u_2}(t) = \underline{Z_b}\ \underline{i}(t)$ avec $\underline{Z_b} = r + jL\omega$.

donc $\varphi = \arg(\underline{Z_b}) \Rightarrow$ la mesure de φ permet de déterminer $\underline{Z_b}$ et donc, connaissant r, de déterminer L.

$\varphi = \arctan\left(\dfrac{L\omega}{r}\right)$

$\Delta t = 10^{-3}\ s$



0,001

soit $\dfrac{L\omega}{r} = \tan\varphi$

$\Leftrightarrow L = \dfrac{1}{\omega}\, r \tan\varphi$

$i(t) = I_m \cos(\omega t)$

$u_2(t) = U_{2m}\cos(\omega t + \varphi) = \cos(\omega(t + \Delta t))$

avec $\Delta t = \dfrac{\varphi}{\omega} \Rightarrow \varphi = \omega \Delta t = \dfrac{2\pi \Delta t}{T}$

$\Rightarrow \boxed{L = \dfrac{T}{2\pi}\, r \tan\left(2\pi \dfrac{\Delta t}{T}\right)}$

A.N : $T = 10^{-2}\ s$, $r = 10\ \Omega$, $\Delta t = 10^{-3}\ s$ $\Rightarrow$ $L \simeq 11{,}5\ mH$