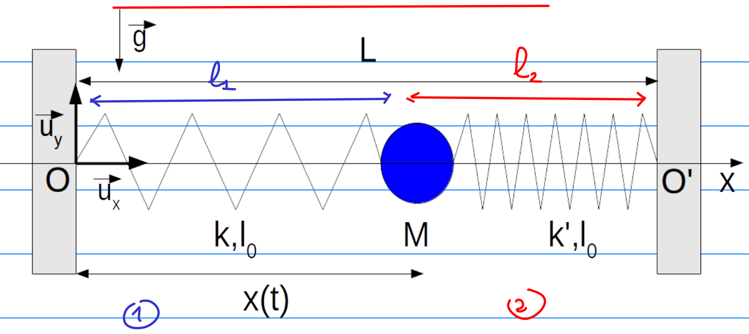
TD S1 – corrigé

S1 – Oscillateur à 2 ressorts



1) Syst : M(m) ~ pt matériel.

Rf : labo R, galiléen.

IDF : base de travail $(\vec{u_x}, \vec{u_y})$

– poids $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\,\vec{e_y}$

– réact° du support $\vec{N} = N\vec{e_y}$

– tension du ressort (1) :

$\vec{T_1} = -k(l_1 - l_0)\,\vec{u_x}$ avec $l_1 = x$

$\Rightarrow \vec{T_1} = -k(x - l_0)\,\vec{u_x}$

– tension du ressort (2)

$\vec{T_2} = +k'(l_2 - l_0)\,\vec{u_x}$ avec $l_2 = L - x$

$\Rightarrow \vec{T_2} = +k'(L - x - l_0)\,\vec{u_x}$

2ᵉ loi de Newton appliquée à la masselotte :

$m\vec{a}(M)/_{R} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{T_1} + \vec{T_2}$ avec $m\vec{a} = m\ddot{x}\,\vec{u_x}$

Projection sur la base $(\vec{u_x}, \vec{u_y})$:

. $\vec{u_y}$: $N = mg$ (la réact° du support compense le poids)

. $\vec{u_x}$: $m\ddot{x} = -k(x - l_0) + k'(L - x - l_0)$ (1)

Forme canonique de (1) : $\ddot{x} + \underbrace{\left(\frac{k+k'}{m}\right)}_{\omega_0^2}x = \underbrace{+\frac{k}{m}l_0 + \frac{k'}{m}(L - l_0)}_{\omega_0^2 x_{eq}}$

D'où $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k+k'}{m}}}$ pulsation propre de l'oscillateur

$\omega_0^2 x_{eq} = \frac{k}{m}l_0 + \frac{k'}{m}(L - l_0) \Rightarrow \boxed{x_{eq} = \frac{k\,l_0 + k'(L - l_0)}{k+k'}}$ position d'équilibre.

Va : $[x_{eq}] = L$ ✓

si $k = k' \Rightarrow x_{eq} = \frac{L}{2}$ ✓

si $k' = 0 \Rightarrow x_{eq} = l_0$ ✓

2) C.I. : $x(0^-) = x_{eq}$, $\dot{x}(0) = v_0$

Solut° générale de (1) : $\forall t \geq 0$, $x(t) = x_{eq} + a\cos(\omega_0 t) + b\sin(\omega_0 t)$

$a, b = ?$

Continuité de la position à $t=0$:

$x(0^+) = x(0^-) \Leftrightarrow x_{eq} + a = x_{eq} \Rightarrow \underline{a=0}$

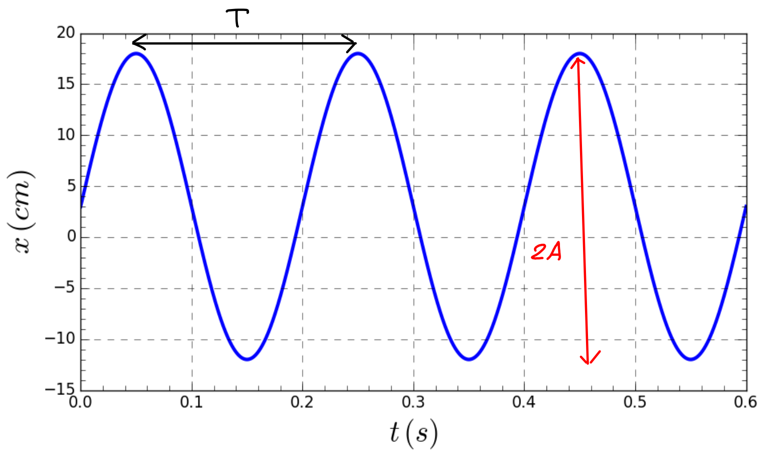
Continuité de la vitesse à $t=0$ $\quad (\dot{x}(t) = b\omega_0 \cos(\omega_0 t))$

$\dot{x}(0^+) = \dot{x}(0^-) \Leftrightarrow b\omega_0 = v_0 \Leftrightarrow \underline{b = \frac{v_0}{\omega_0}}$

L Va

D'où la solut° : $\boxed{\forall t \geq 0,\ x(t) = x_{eq} + \frac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)}$

3/



Période $T = 0,2$ s

Amplitude $A = 15$ cm.

Or $A = \frac{v_0}{\omega_0}$ et $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$

d'où : $\boxed{v_0 = \frac{2\pi A}{T}}$

$\underline{\text{A.N.}}$: $v_0 = 4,7\ \text{m.s}^{-1}$

S2 - Équirépartition de l'énergie

1. O.H. de coordonnée $x(t)$ et de pulsat° propre ω_0 : $\boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0}$ (1)

2. $x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$ sol de (1) ?

$\ddot{x} = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi) \Rightarrow \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$. cqfd.

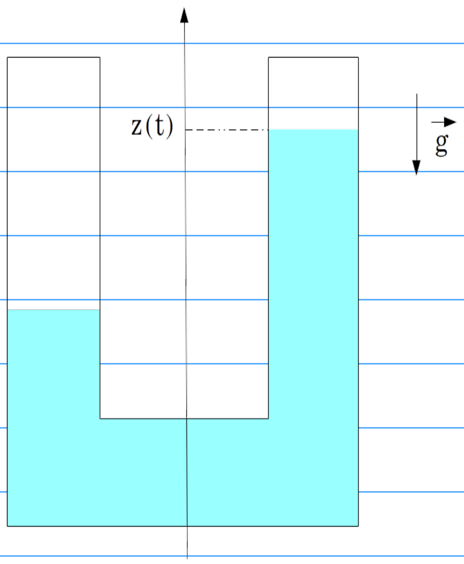
3. Energie mécanique de l'O.H. : $\boxed{E_m = \underbrace{\frac{1}{2} m \dot{x}^2}_{E_c} + \underbrace{\frac{1}{2} m \omega_0^2 x^2}_{E_p}}$

4. $\langle E_c \rangle = \frac{1}{2} m \langle \dot{x}^2 \rangle = \frac{1}{2} m A\omega_0^2 \underbrace{\langle \sin^2(\omega_0 t + \varphi) \rangle}_{=\frac{1}{2}} \Leftrightarrow \langle E_c \rangle = \frac{1}{4} m A^2 \omega_0^2$

$\langle E_p \rangle = \frac{1}{2} m\omega_0^2 \langle x^2 \rangle = \frac{1}{2} m A^2 \omega_0^2 \underbrace{\langle \cos^2(\omega_0 t + \varphi) \rangle}_{=\frac{1}{2}} \Leftrightarrow \langle E_c \rangle = \frac{1}{4} m A^2 \omega_0^2$

D'où $\boxed{\langle E_c \rangle = \langle E_p \rangle = \frac{1}{4} m A^2 \omega_0^2.}$

S3 - La houle selon Newton.

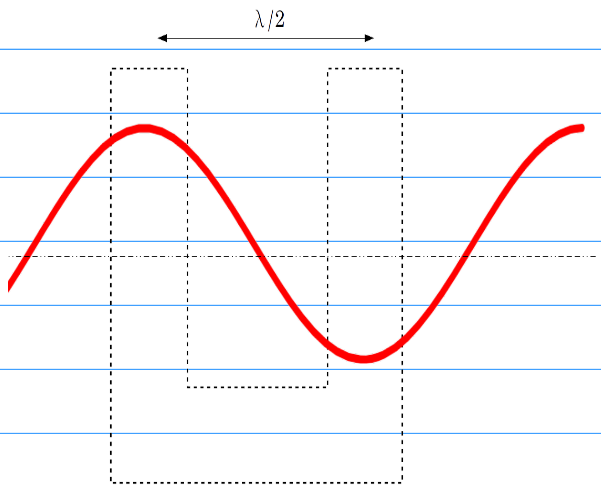


1) $\ddot{z} + \underbrace{\frac{2g}{L}}_{\omega_0^2} z = 0$

Pulsat° propre de l'O.H. : $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{2g}{L}}}$

Le fluide oscille de façon harmonique à la pulsation $\omega_0 = \sqrt{\frac{2g}{L}}$

2/



$L = \frac{\lambda}{2}$ (Rem : modèle faux)

2.1. Par analogie : $\omega_0 = \sqrt{\frac{2g}{L}} = \sqrt{\frac{4g}{\lambda}} = 2\sqrt{\frac{g}{\lambda}}$

or $T = \frac{2\pi}{\omega_0} \Leftrightarrow \boxed{T = \pi\sqrt{\frac{\lambda}{g}}}$

A.N. : $\lambda \sim 5\ m \Rightarrow T \sim \frac{3}{\sqrt{2}} \sim 2\ s$

Va O.G. ✓

2.2/ Célérité (vitesse de phase) : $\boxed{v_\varphi = \frac{\lambda}{T}}$

A.N. : $v_\varphi \sim \frac{5}{2} \sim 2{,}5\ m.s^{-1}$ O.G. ✓ Va