TD Dimensions & Unités
Corrigé

D1 - Dimensions de qq grandeurs

1/ Force F

$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$, souvent $\underbrace{m\vec{a} = \vec{F}}_{\text{homogène}}$ $\Rightarrow [m\vec{a}] = [\vec{F}]$ (*)

avec $[m\vec{a}] = [m][a]$

avec $[m] = M$ $\Rightarrow [m\vec{a}] = MLT^{-2}$
$[\vec{a}] = L.T^{-2}$

(*) $\Rightarrow$ $[\vec{F}] = MLT^{-2}.$

ou $P = mg \Rightarrow [P] = [mg]$ (avec $[P] = [F]$)
$= [m][g]$ P est une force

accélération

- - - -

2/ Energie E . [E] ?

$E_c = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow [E_c] = [\frac{1}{2}mv^2]$

avec $[E_c] = [E]$
$[\frac{1}{2}mv^2] = [\frac{1}{2}][m][v]^2 = \varnothing \times M \times (L.T^{-1})^2$

$\Rightarrow [E] = ML^2T^{-2}$

3/ $[R] = ?$ $P = RI^2 \Rightarrow [R] = [P] \times I^{-2}$

or $[P] = \frac{[E]}{T}$ et $[E] = ML^2T^{-2}$

d'où $[R] = ML^2T^{-3}I^{-2}.$

D2 - Dimension de la constante de Planck

h : cste de Planck
une action

$h = 6,63 \times 10^{-34}$ J.s

Unité de h : J.s $\Rightarrow [h] = [E] \times T$

avec $[E] = ML^2T^{-2}$

$\Rightarrow \underline{[h] = ML^2T^{-1}}$

D3 - Homogénéité d'une équation

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$$

Equation homogène $\Longrightarrow \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right] = \left[D \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right]$

$\Longleftrightarrow \frac{\cancel{[\varphi]}}{T} = [D] \frac{\cancel{[\varphi]}}{L^2} \Longleftrightarrow \underline{[D] = L^2 . T^{-1}}$

unité légale : $m^2 . s^{-1}$

D4 - Force de trainée

$F = \frac{1}{2} C A^\alpha \rho^\beta v^\gamma$? $\Rightarrow \alpha, \beta, \gamma$?

1./ $[F] = MLT^{-2}$
$[A] = L^2$
$[\rho] = ML^{-3}$
$[v] = L.T^{-1}$

2/ Syst d'eq vérifié par α, β, γ :

$F = \frac{1}{2} C A^\alpha \rho^\beta v^\gamma$

$\Downarrow$ homogène

$[F] = [\frac{1}{2} C A^\alpha \rho^\beta v^\gamma]$

$\Longleftrightarrow [F] = [\frac{1}{2}][C][A]^\alpha [\rho]^\beta [v]^\gamma$

$$\Leftrightarrow \quad M^1 L^1 T^{-2} = \emptyset \cdot \emptyset \cdot (L^2)^{\alpha} \cdot (ML^{-3})^{\beta} \cdot (L.T^{-1})^{\gamma}$$

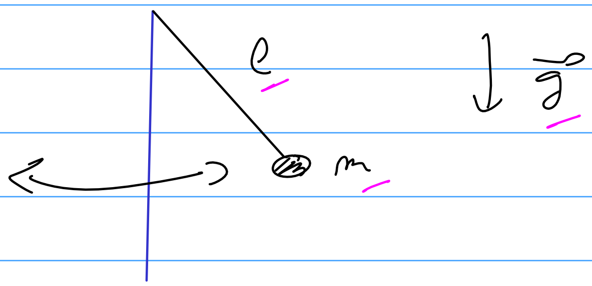
$$= M^{\beta} . L^{2\alpha - 3\beta + \gamma} . T^{-\gamma}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 1 \\ 2\alpha - 3\beta + \gamma = 1 \\ -\gamma = -2 . \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 1 \\ \gamma = 2 \\ \alpha = \frac{1}{2}(1 - \gamma + 3\beta) = \frac{1}{2}(1 - 2 + 3) \\ \quad = 1 \end{cases}$$

D'où $\boxed{F = \frac{1}{2} C \rho A v^2 .}$

D5 - Période d'un pendule

$\omega_0 = ?$



$[\omega_0] = T^{-1}$

$[m] = M$

$[\ell] = L$

$[g] = L.T^{-2}$

$\Rightarrow \left[\frac{g}{\ell}\right] = T^{-2}$

$\Rightarrow \left[\sqrt{\frac{g}{\ell}}\right] = T^{-1}$

$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$

On suppose alors que $\omega_0 \propto \sqrt{\frac{g}{\ell}}$

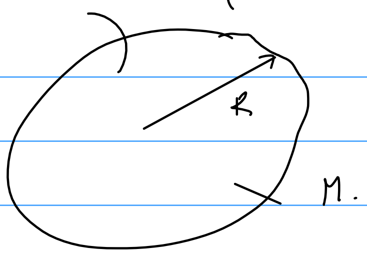
proportionnel

A.N. : $\omega_0 \sim \sqrt{\frac{10}{1}} \sim 3 \text{ rad.s}^{-1}$

$T \sim \frac{2\pi}{\omega_0} \sim \frac{6}{3} \sim 2 \text{ s.}$

Ex - Espérance de vie d'un mammifère.

eau $\rho = 1\,kg.L^{-1}$



$E \propto M$

$P \propto R^2$

1) $[N] = T^{-1}$
$[E] = M L^2 . T^{-2}$
$[P] = M L^2 T^{-3}$
$\Rightarrow N \propto \frac{P}{E}$

or $P \propto R^2$, $E \propto M$ $\Rightarrow N \propto \frac{R^2}{M}$

$R = f(M)$? $M = \rho \times V$ et $V = \frac{4}{3}\pi R^3$

$\Leftrightarrow M \propto R^3$

$\Leftrightarrow R \propto M^{1/3}$

D'où : $N \propto \frac{M^{2/3}}{M} \Rightarrow \boxed{N \propto M^{-1/3}}$

2) Durée d'un battement $T = \frac{1}{N}$

$k = 10^9$ battements

$\Rightarrow \tau = kT = \frac{k}{N} \rightarrow \boxed{\tau = k M^{1/3}}$

A.N. : 1 an $= 365 \times 24 \times 3600 \approx 3 \times 10^8$ s

éléphant : $M \sim 10\,t \sim 10^4$ kg $\Rightarrow \tau \sim 71$ ans (en fait ~ 140 ans)

homme : $M \sim 65$ kg $\Rightarrow \tau \sim 13$ ans (en fait ~ 80 ans)

souris : $M \sim 100$ g $\sim 0,1$ kg $\Rightarrow \tau \sim 1,5$ ans (en fait ~ 2 mois)

Ordres de grandeurs assez satisfaisants vu la simplicité du modèle.