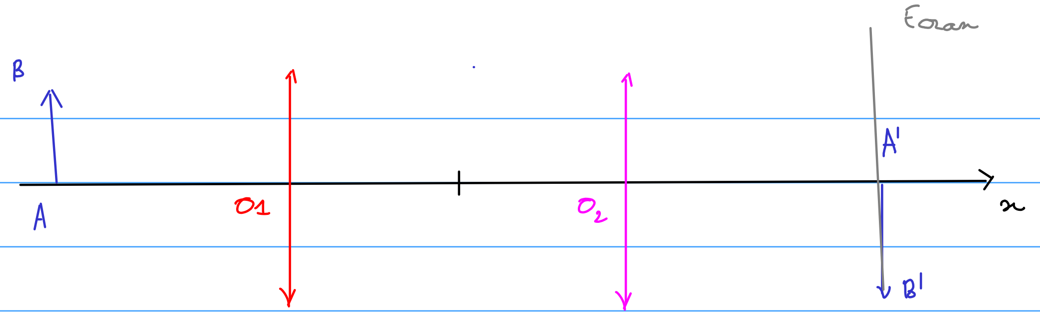
TPS6 – Démonstration de la relation de Bessel

Relation de Bessel :



Pour $D = \overline{AA'}$ fixée et $D \geq 4f'$, il existe 2 positions x_1, x_2 de la lentille convergente L de distance focale f' tq A et A' soient conjugués par L. $d = x_2 - x_1$ vérifie :

$$\boxed{\left(\frac{d}{D}\right)^2 = 1 - \frac{4f'}{D}}$$

Preuve :

On cherche l'équation vérifiée par la position x_0 de la lentille si $A \xrightarrow{L} A'$.

$$A \xrightarrow{L} A' \Leftrightarrow -\frac{1}{\overline{OA}} + \frac{1}{\overline{OA'}} = \frac{1}{f'} \quad \text{avec} \quad \overline{OA} = x_A - x_0, \quad \overline{OA'} = x_{A'} - x_0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-\overline{OA'} + \overline{OA}}{\overline{OA}\,\overline{OA'}} = \frac{1}{f'} \Leftrightarrow \overline{A'A}\, f' = \overline{OA}\,\overline{OA'} \Leftrightarrow -Df' = (x_A - x_0)(x_{A'} - x_0)$$

$$\Leftrightarrow -Df' = x_A x_{A'} - (x_A + x_{A'})x_0 + x_0^2$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x_0^2 - (x_A + x_{A'}) + x_A x_{A'} + Df' = 0} \quad (*)$$

∃ 2 solutions à (*) dans $\mathbb{R}$ si $\Delta \geq 0$ (si $\Delta = 0$, les 2 solutions n'en sont alors qu'une)

avec
$$\begin{aligned}
\Delta &= (x_A + x_{A'})^2 - 4x_A x_{A'} - 4Df' \\
&= x_A^2 + x_{A'}^2 + 2x_A x_{A'} - 4x_A x_{A'} - 4Df' \\
&= x_A^2 + x_{A'}^2 - 2x_A x_{A'} - 4Df' \\
&= (x_{A'} - x_A)^2 - 4Df' \\
&= D^2 - 4Df'
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\Delta = D(D - 4f')}$$

D'où $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow D - 4f' \geq 0 \Rightarrow \boxed{D \geq 4f'}$

$$\overbrace{\phantom{(x_A + x_{A'})}}^{x_I \text{ avec } I \text{ milieu de } [AA']}$$

Alors les solutions sont : $x_1 = + \frac{(x_A + x_{A'})}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\Delta}$

$x_2 = + \frac{(x_A + x_{A'})}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\Delta}$ symetrie par rapport à I

et $d = x_2 - x_1 = \sqrt{\Delta} = \left(D(D - 4f')\right)^{1/2}$

car $d > 0$

$\Leftrightarrow d^2 = D(D - 4f')$

$$\Leftrightarrow \boxed{\left(\frac{d}{D}\right)^2 = 1 - 4\frac{f'}{D}}$$