TP CN2 – Calcul approché d'intégrales

D.Malka – MPSI 2018-2019 – Lycée Jeanne d'Albret

I1 – Période d'un pendule pesant

1. **Polynômes interpolateurs de Lagrange**

   Une façon de représenter en mémoire le polynôme $P : x \mapsto P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ consiste à stocker ses coefficients a_i dans une liste P. $P[i]$ contient alors la valeur de a_i tandis que l'indice i est le degré du monôme de coefficient a_i. Ainsi, par exemple, on représente le polynôme $P(x) = 2x^3 + 4x + 1$ par la liste $[1, 4, 0, 2]$.

   Les polynômes interpolateurs de Lagrange P_j permettent d'interpoler une série de $n+1$ points $\{(x_i,y_i)\}$ (i allant de 0 à n) par un polynôme L de degré au plus égal à n passant exactement par chacun des points de la série (fig.1). Le polynôme $L(x)$ s'écrit :

$$L(x) = \sum_{j=0}^{n} y_j P_j(x) \quad \text{avec} \quad P_j(x) = \prod_{i=0, i\neq j}^{n} \frac{x - x_i}{x_j - x_i}$$

   Les polynômes P_j constituent une base de l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n.

   Pour calculer le polynôme L on dispose des fonctions fig.2 dont certaines restent à écrire. **Pour écrire les fonctions qui sont demandés par la suite, on pourra utiliser toute fonction implémentée fig.2.**

1.1 Donner la représentation mémoire du polynôme $5x^4 - 2x^2 + 1$.

1.2 Donner l'expression mathématique du polynôme P_0 relatifs aux points $(-9, 5)$; $(-4, 2)$; $(-1, -2)$; $(7, 9)$.

1.3 Expliquer brièvement ce que fait la fonction `mult_pol` et justifier son implémentation.

1.4 Implémenter la fonction `base_pol` qui prend en argument la liste `x` des abscisses $\{x_i\}$ et la liste `y` des ordonnées $\{y_i\}$ des points à interpoler ainsi que l'entier `j` et renvoie le polynôme de Lagrange P_j.

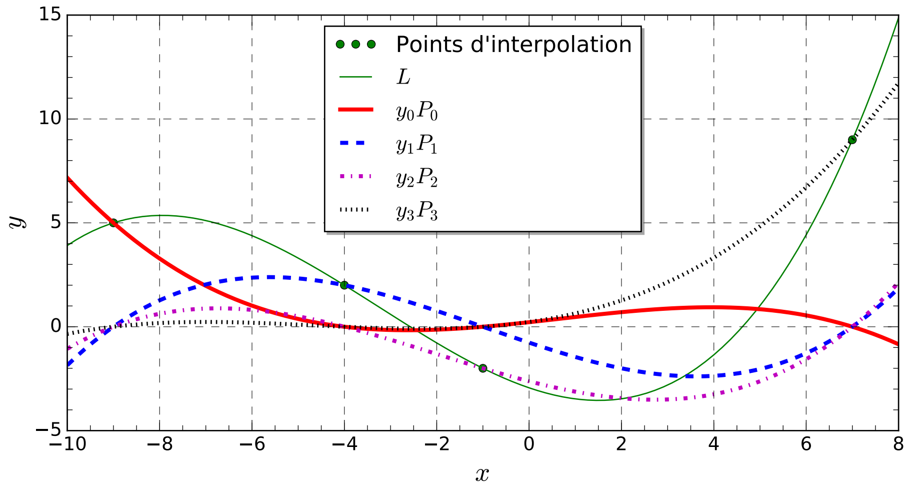

Figure 1 – Interpolation polynomiale. Le polynôme L passe par chacun des points $(-9, 5)$; $(-4, 2)$; $(-1, -2)$; $(7, 9)$. Il est une combinaison linéaire des polynômes interpolateurs de Lagrange P_0, P_1, P_2 et P_3.

1.5 Implémenter la fonction `add_pol` qui renvoie le polynôme `R` égal à la somme des deux polynômes `P` et `Q` passés en argument.

1.6 Implémenter la fonction `eval_pol` qui renvoie la valeur $P(x)$ du polynôme `P` pour la valeur `x` passée en argument.

1.7 Compléter le code fig.3 par les trois instructions permettant de tracer le polynôme L interpolant les points $(-9, 5)$; $(-4, 2)$; $(-1, -2)$; $(7, 9)$.

```
#Points a interpoler
x=[-9,-4,-1,7]
y=[5,2,-2,9]
l=linspace(-10,8,100)#liste de cents points equirepartis entre -10
    et 8
# instruction 1
# instruction 2
# instruction 3
```

FIGURE 3 – Tracé du polynôme L

2. **Intégration numérique par la méthode de Simpson**
   Pour calculer numériquement et de façon approchée une intégrale

$$J=\int_a^b f(x)\underset{\cdot}{\mathrm{x}}$$

   par la méthode de Simpson sur un intervalle $[a,b]$ avec a et b finis :
   — on discrétise l'intervalle $[a,b]$ en sous-intervalles $I_k=[x_k,x_{k+1}]$ avec un pas h ;
   — sur chaque sous-intervalle I_k, on approche f par le polynôme interpolateur de Lagrange d'ordre 2 passant par les points $y_{0,k}=x_k$, $y_{1,k}=\frac{1}{2}(x_k+x_{k+1})$ et $y_{2,k}=x_{+1}$;
   — sur I_k, l'intégrale de f est alors approchée par $\widetilde{J_k}=\frac{f_0+4f_1+f_2}{6}(x_{k+1}-x_k)$ où $f_0=f(y_{0,k})$, $f_1=f(y_{1,k})$ et $f_2=f(y_{2,k})$;
   — On évalue $\widetilde{J}$ comme la somme des J_k.

   2.1 Illustrer graphiquement la méthode de Simpson sur un intervalle I_k.
   2.2 Donner les expressions de x_k et x_{k+1} en fonction de h.
   2.3 Écrire la fonction `simps` implémentant la méthode de Simpson. Elle prendra notamment en argument le nombre n de sous-intervalles de $[a,b]$.
   2.4 Évaluer la complexité de cette fonction en fonction de h.
   2.5 Commenter le graphe fig.4.

3. **Partie 2 - Période du pendule pesant**
   On considère un pendule pesant de masse m et de centre de masse G. Cet pendule est fixé en O par une liaison pivot. On note $l=OG$. Initialement, le pendule est écarté d'un angle θ_0 et lancé avec une vitesse v_0. Avec un choix d'origine adapté, l'énergie potentielle du pendule peut s'écrire :

$$E_p=-mgl\cos\theta$$

   En négligeant les frottements, l'énergie mécanique du pendule se conserve si bien que :

$$E_m=\frac{1}{2}mv_0^2-mgl\cos\theta_0=\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2-mgl\cos\theta$$

   On peut alors calculer formellement la période T du mouvement d'amplitude θ_m du pendule par l'intégrale :

$$T=\left|2\int_{-\theta_m}^{\theta_m}\frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\frac{v_0^2}{l^2}+2\omega_0^2(\cos\theta-\cos\theta_0)}}\right|$$

   où $\omega_0=\sqrt{\frac{g}{l}}$ et où θ_m :
   — est la solution de positive de $E_p(\theta_m)=E_m$ si $E_m\leq mgl$,
   — vaut π si $E_m\geq mgl$.

   3.1 Écrire une fonction `inclinaison_max` prenant en argument l, m, les conditions initiales θ_0 et v_0 et renvoyant l'inclinaison maximale θ_m.
   3.2 Construire le graphe de T en fonction de θ_m et commenter.

```python
def init_pol(n):
    N=[]
    for i in range(n+1):
        N.append(0)
    return N

def add_pol(P,Q):
    #A IMPLEMENTER

def mult_pol(P,Q):
    p=len(P)
    q=len(Q)
    r=(p+q)-2#degre max de R
    R=init_pol(r)
    for i in range(p):
        for j in range(q):
            R[i+j]=R[i+j]+P[i]*Q[j]
    return R

def base_pol(x,y,j):
    """
    x : liste des abscisses des points a interpoler
    y : liste des ordonnees des points a interpoler
    j : int
    """
    #A IMPLEMENTER

def inter_pol(x,y):
    n=len(x)#degre de L
    L=[0]
    for j in range(n):
        P=base_pol(x,y,j)
        Q=mult_pol([y[j]],P)
        L=add_pol(L,Q)
    return L

def eval_pol(P,x):
    #A IMPLEMENTER
```

FIGURE 2 – Ensembles des fonctions permettant l'interpolation polynomiale d'une série de points

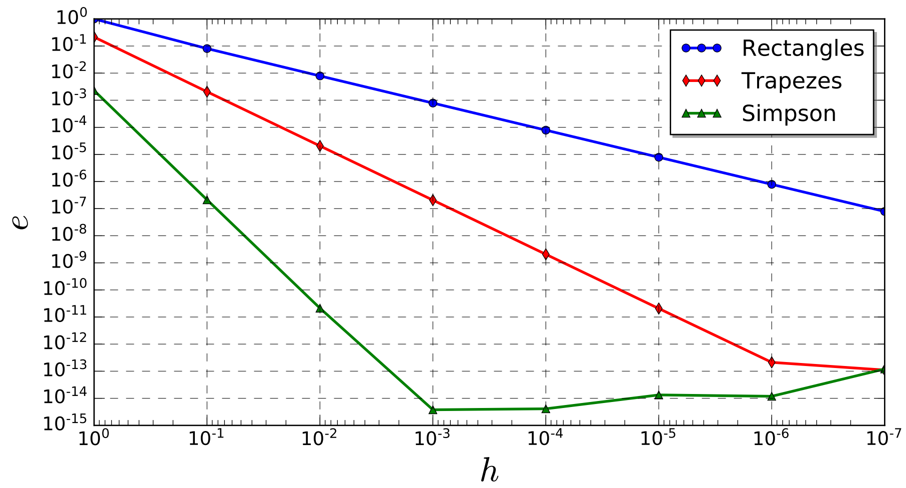

FIGURE 4 – Convergences des méthodes du rectangle, du trapèze et de Simpson sur l'intégrale sur $[0, \pi/2]$ de la fonction $f : x \to \sin(x)$. h est le pas d'intégration et e l'erreur relative sur la valeur de l'intégrale.