TP CN2
Période du pendule pesant

1. Polynômes interpolateurs de Lagrange.

1.1) Représentation : $5x^4 - 2x^2 + 1$. Représentation : [1, 0, -2, 5]

1.2) $P_0(x) = \frac{x+4}{-3+4} \times \frac{x+1}{-3+1} \times \frac{x-7}{-3+7} = \frac{(x+4)(x+1)(x-7)}{-80}$

1.3) La fonction mult_pol multiplie deux polynômes.

1.4) Fonction base_pol. $P_j = \prod_{i \neq j} \frac{x-x_i}{x_j-x_i} = \prod_{i \neq j} Q_i$ avec $Q_i = \frac{x-x_i}{x_j-x_i}$

```
def base_pol(x,j):
    n=len(x)
    P=[1]
    for i in range(n):
        if i!=j:
            Q=[-x[i]/(x[j]-x[i]),1/(x[j]-x[i])]
            P=mult_pol(P,Q)
    return P
```

1.5) Fonction add_pol.

```
def add_pol(P,Q):
    p=len(P)
    q=len(Q)
    n=min(p,q)
    if p>q :
        R=P
    else:
        R=Q
    for i in range(n):
        R[i]=P[i]+Q[i]
    return R
```

1.6) Fonction eval_pol.

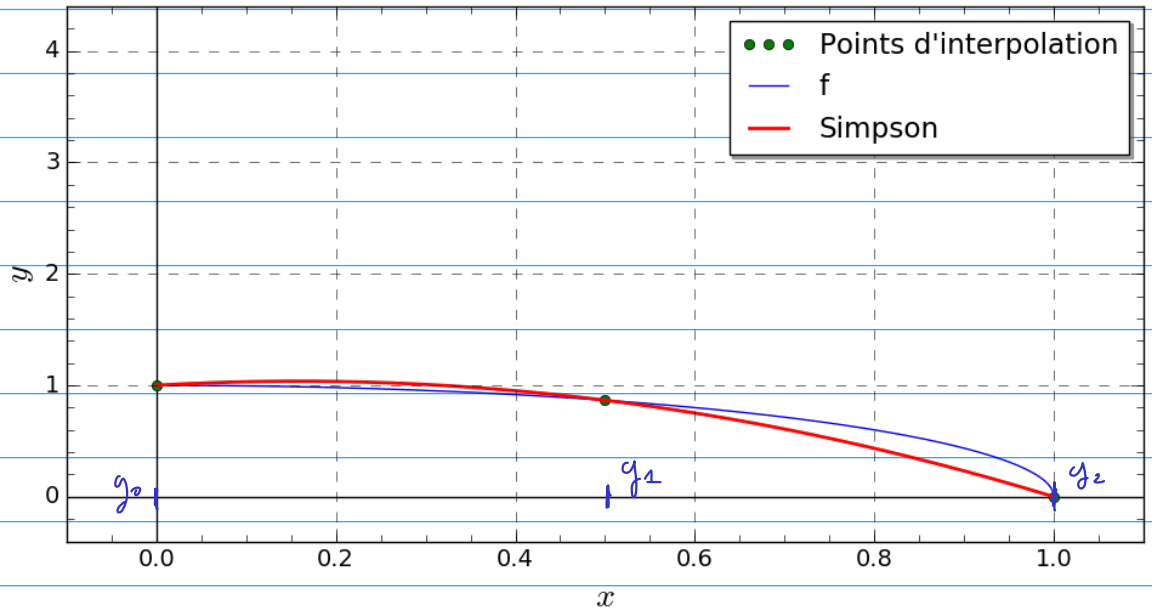
```
def eval_pol(P,x):
    val=0
    for i in range(0,len(P)):
        val=val+P[i]*x**i
    return val
```

1.7)

```
l=linspace(-10,8,100)
L=inter_pol(x,y) # on calcule le polynôme (renvoie la liste des coeff)
y_tot=eval_pol(L,l) # on évalue le polynôme en chaque point de l
plot(l,y_tot,'g',lw=1,label=r"$L$") # on trace le graphe.
```

2. Intégration numérique par la méthode de Simpson

2.1) Illustration graphique de la méthode.



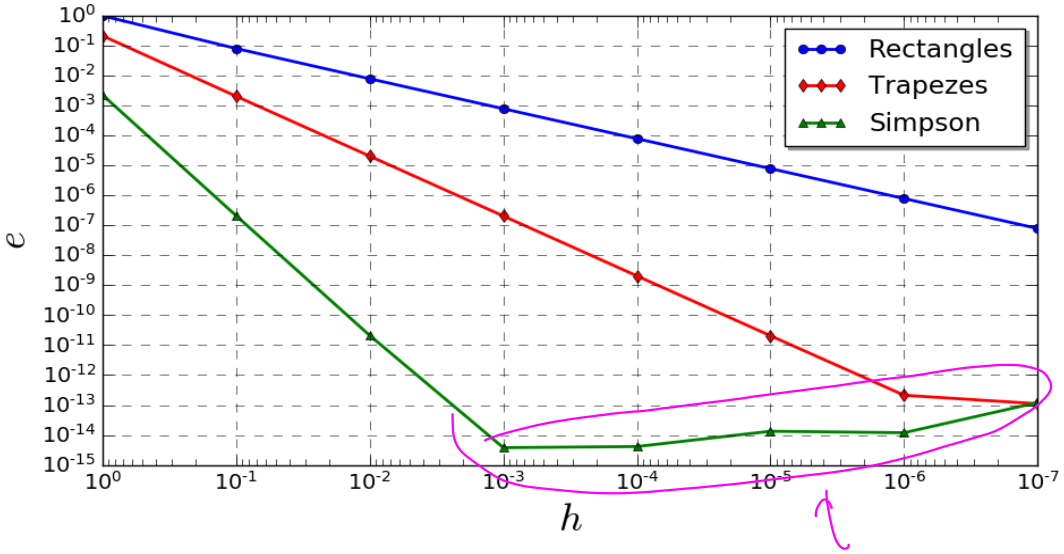
2.2) $\begin{cases} x_k = a + kh \\ x_{k+1} = a + (k+1)h \end{cases} \Rightarrow x_{k+1} - x_k = h$

2.3)

```
def simps(f,a,b,n):
    """
    Calculate an approximate value of the integral of f over [a,b] using the Simpson's meth
    a,b : float, interval extrema
    n : int, number of sub-intervals to perform calculation on
    J : float, approximate value of the integral
    ---------- Minimal example----------
    f=lambda x:4*sqrt(1-x^2)
    simps(f,0,1,10**4)
    [Output] : 3.14159249122
    """
    h=(b-a)/n
    J=0
    for k in range(n):
        y0=a+k*h
        y2=y0+h
        y1=1/2*(y0+y2)
        J=J+(f(y0)+4*f(y1)+f(y2))*h
    J=J/6
    return J
```

2.4) Complexité $O(n) = O\left(\frac{b-a}{h}\right)$

2.5)



La méthode de Simpson converge plus vite que la méthode des trapèzes qui converge elle-même plus vite que la méthode des rectangles

Estimons l'ordre α de convergence de méthode défini par :

$$e \leq C \times h^{\alpha} \iff \log e \leq K + \alpha \log h.$$

- Simpson $\alpha \sim \frac{14-3}{3} \sim 4$
- Trapèze $\alpha \sim \frac{13-1}{6} \sim 2$
- Rectangle $\alpha \sim \frac{7}{7} \sim 1$

Pour la méthode de Simpson et, dans une moindre mesure, dans la méthode des trapèzes, l'erreur tend vers 10^{-14} / 10^{-13} sans adéquation avec l'ordre de convergence. La raison : lorsque h devient trop petit les erreurs numériques dues à la représentation des nombres en machine ne sont plus négligeables et peuvent même exploser (arrondis, absorption, ...).

3. Période du pendule pesant

1) Inclinaison maximale θ_m

Si $E_m \leq mgl$, $E_p(\theta_m) = E_m \iff -mgl\cos(\theta_m) = E_m$

$\iff \theta_m = \arccos(-E_m/mgl)$ En définissant $\theta_m \geq 0$.

Si $E_m > mgl$, $\theta_m = \pi$.

```
def inclinaison_max(m,l,theta_0,v0):
    Em=1/2*m*v0**2-m*g*l*np.cos(theta_0)
    Epm=m*g*l
    if Em<=Epm:
        return np.arccos(Em/-Epm)
    else:
        return np.pi
```

2)
```
def periode_pendule(m,l,theta_0,v0):
    n=1000
    w0c=g/l
    theta_m=inclinaison_max(m,l,theta_0,v0)
    f=lambda x: 1/np.sqrt(v0**2/l**2+2*w0c*(np.cos(x)-np.cos(theta_0)))
    T=2*simps(f,-theta_m+theta_m/n,theta_m-theta_m/n,n)
    return T
```

$\# \; T = 2\int_{-\theta_m}^{\theta_m} \frac{d\theta}{\left(\frac{v_0^2}{l^2} + 2\omega_0^2(\cos\theta - \cos\theta_0)\right)}$

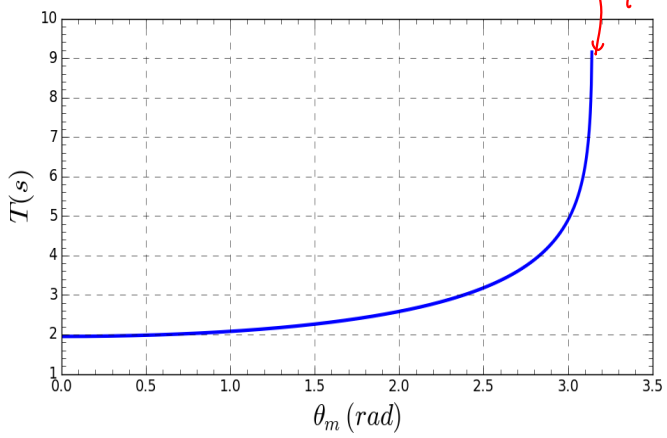
on évite la divergence en $\theta = \pm\theta_m$.

$T = f(\theta_m)$ pour $v_0 = 0$. Dans ce cas $\theta_m = \theta_0$.

divergence pour $\theta = \pi$ (cas critique)

```
theta_0s=[i/1000*np.pi for i in range(1,1001)]
Ts=[]
for theta_0 in theta_0s:
    T=periode_pendule(l,m,theta_0,0)
    Ts.append(T)

plt.figure()
plt.plot(theta_0s,Ts)
plt.xlabel(r'$\theta_m\,(rad)$')
plt.ylabel(r'$T(s)$')
plt.savefig('periode_vs_amplitude.png')
plt.show()
```



La simulation montre que plus la période du pendule est une fct° croissante de l'amplitude.

Si $v_0 = 2\ m.s^{-1}$?

$E_m = mgl$ (cas critique) $T \to +\infty$