TP CN3 – Résolution d'équations différentielles

D.Malka – MPSI 2018-2019 – Lycée Jeanne d'Albret

I1 – Conservation de l'énergie ?

Soient y une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et t_{min} et t_{max} deux réels tels que $t_{min} < t_{max}$. On note I l'intervalle $[t_{min}, t_{max}]$. On s'intéresse à une équation différentielle du second ordre de la forme :

$$\forall t \in I, \quad y''(t) = f(y(t)) \tag{1}$$

où f est une fonction donnée, continue sur $\mathbb{R}$. De nombreux systèmes physiques peuvent être décrits par une équation de ce type. On suppose connues les valeurs $y_0 = y(t_{min})$ et $z_0 = y'(t_{min})$. On suppose également que le système physique étudié est conservatif. Ce qui entraîne l'existence d'une quantité indépendante du temps (énergie, quantité de mouvement,...), notée E , qui vérifie l'équation (2) où $g' = -f$.

$$\forall t \in I \quad \frac{1}{2}y'(t)^2 + g(y(t)) = E \tag{2}$$

1. **Mise en forme du problème**

   Pour résoudre numériquement l'équation différentielle (1), on introduit la fonction $z : I \mapsto \mathbb{R}$ définie par :

   $$\forall t \in I, \quad z(t) = y'(t)$$

   1.1 Montrer que l'équation (1) peut se mettre sous la forme d'un système différentiel du premier ordre en $z(t)$ et $y(t)$, noté (S).

   1.2 Soit n un entier strictement supérieur à 1 et $J_n = [[0, n-1]]$. On pose $h = \dfrac{t_{max} - t_{min}}{n-1}$ et $\forall i \in J_n$, $t_i = t_{min} + ih$. Montrer que, pour tout entier $i \in [[0, n-2]]$,

   $$y(t_{i+1}) = y(t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} z(t)dt \qquad \text{et} \qquad z(t_{i+1}) = z(t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(y(t))dt \tag{3}$$

La suite du problème exploite les notations introduites dans cette partie et présente deux méthodes numériques dans lesquelles les intégrales précédentes sont remplacées par une valeur approchée.

2. **Schéma d'Euler explicite**

   Dans le schéma d'Euler explicite, chaque terme sous le signe intégrale est remplacé par sa valeur prise en la borne inférieure.

   2.1 Dans ce schéma, montrer que les équations (3) permettent de définir deux suites $(y_i)_{i \in J_n}$ et $(z_i)_{i \in J_n}$ où y_i et z_i sont des valeurs approchées de $y(t_i)$ et $z(t_i)$. Donner les relations de récurrence permettant de déterminer les valeurs de y_i et z_i connaissant y_0 et z_0.

   2.2 Écrire une fonction `euler` qui reçoit en argument les paramètres qui vous semblent pertinents et qui renvoie deux listes de nombres correspondant aux valeurs associées aux suites $(y_i)_{i \in J_n}$ et $(z_i)_{i \in J_n}$. Vous justifierez le choix des paramètres transmis à la fonction.

   2.3 Pour illustrer cette méthode, on considère l'équation différentielle

   $$\forall t \in I, \quad y''(t) = -\omega^2 y(t)$$

   dans laquelle ω est un nombre réel.

   2.3.1 Montrer qu'on peut définir une quantité E , indépendante du temps, vérifiant une équation de la forme (2).

   2.3.2 On note E_i la valeur approchée de E à l'instant t_i, $i \in J_n$, calculée en utilisant les valeurs approchées de $y(t_i)$ et $z(t_i)$ obtenues à la question 2.1.

   2.3.2.1 Quelle devrait-être l'allure du graphe de z_i en fonction de y_i si le schéma d'Euler explicite conservait E_i ?

   2.3.2.2 Exécuter la fonction `euler` pour $y_0 = 3$, $z_0 = 0$, $t_{min} = 0$, $t_{max} = 3, \omega = 2\pi$ et $n = 100$, tracer la trajectoire de phase (z_i, y_i) et commenter.

2.3.2.3 Monter que $E_{i+1} - E_i = h^2\omega^2 E_i$. Justifier alors précisément l'allure du graphe précédent.

3. **Schéma de Runge-Kutta d'ordre 2**

Le schéma numérique de Runge-Kutta d'ordre 2 s'écrit :

$$\left\{\begin{array}{l} y_{i+1} = y_i + z_{i+1/2}h \\ z_{i+1} = z_i + f(y_{i+1/2})h \end{array}\right.$$

où $y_{i+1/2}$ et $z_{i+1/2}$ sont des valeurs approchées de $y(t_{i+1/2})$ et $z(t_{i+1/2})$.

3.1 Proposer une méthode pour approcher $z_{i+1/2}$ et $y_{i+1/2}$.

3.2 Écrire alors la fonction `rk2` intégrant l'équation différentielle.

3.3 Tracer la trajectoire de phase et commenter.

I2 – Modèle Proie-Prédateur de Lotka-Volterra

Soit $P(t)$ la population d'un petit poisson et $R(t)$ la population de son prédateur. La dynamique de cette population pet-être décrite par le système d'équation ci-dessous.

$$\left\{\begin{array}{l} P'(t) = n_P P(t) - aR(t)P(t) \\ R'(t) = -m_R R(t) + bP(t)R(t) \end{array}\right.$$

1. Résoudre numériquement ce système à l'aide des fonctions prédéfinies de Python pour $n_P = 10$, $m_R = 5$, $a = 0{,}01$ et $b = 0{,}001$.
2. Sur un même graphe, représenter $P(t)$ et $R(t)$. Commenter.
3. Si l'homme vient à pêcher les petits poissons, d'après vous, quelle population sera-t-elle la plus affectée ?
4. Tester votre hypothèse en modifiant les équations afin de tenir compte de la pêche.