TP CN3 – Corrigé

D.Malka – MPSI 2018-2019 – Lycée Jeanne d'Albret

1. **Mise en forme du problème**

Pour résoudre numériquement l'équation différentielle $y''(t) = f(y(t))$, on introduit la fonction $z : I \mapsto \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall t \in I, \quad z(t) = y'(t)$$

1.1 Système (S) :

$$\begin{cases} y'(t) = z(t) \\ z'(t) = f(y(t)) \end{cases}$$

1.2 Soit n un entier strictement supérieur à 1 et $J_n = [[0, n-1]]$. On pose $h = \dfrac{t_{max} - t_{min}}{n-1}$ et $\forall i \in J_n$, $t_i = t_{min} + ih$. Pour montrer que, pour tout entier $i \in [[0, n-2]]$,

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} z(t)dt \qquad \text{et} \qquad z(t_{i+1}) = z(t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(y(t))dt \tag{1}$$

il suffit d'intégrer les équations du système (S) entre t_i et t_{i+1}.

La suite du problème exploite les notations introduites dans cette partie et présente deux méthodes numériques dans lesquelles les intégrales précédentes sont remplacées par une valeur approchée.

2. **Schéma d'Euler explicite**

Dans le schéma d'Euler explicite, chaque terme sous le signe intégrale est remplacé par sa valeur prise en la borne inférieure.

2.1 Les suites $(y_i)_{i \in J_n}$ et $(z_i)_{i \in J_n}$ sont définies par :

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + z_i.h \\ y_0 = y_0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} z_{i+1} = z_i + f(y_i).h \\ z_0 = z_0 \end{cases}$$

2.2 Fonctions `Euler`.

```
def euler(f,t_min,t_max,n,y_0,z_0):
    y=zeros(n); y[0]=y_0
    z=zeros(n); z[0]=z_0
    h=(t_max-t_min)/(n-1)
    for i in range(n-1):
        y[i+1]=y[i]+z[i]*h
        z[i+1]=z[i]+f(y[i])*h
    return y,z
```

2.3 Pour illustrer cette méthode, on considère l'équation différentielle $\forall t \in I, \quad y''(t) = -\omega^2 y(t)$ dans laquelle ω est un nombre réel.

2.3.1

$$y''(t) = -\omega^2 y(t)$$

$$\Rightarrow y''(t).y'(t) = -\omega^2 y(t) y'(t)$$

En intégrante entre 0 et t :

$$\Rightarrow \int_0^t y''(t).y'(t)dt = -\int_0^t \omega^2 y(t) y'(t)dt$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{2}y'(t)^2 + \frac{1}{2}\omega^2 y(t)^2 = E}$$

Avec $\boxed{E = \frac{1}{2}y'(0)^2 + \frac{1}{2}\omega^2 y(0)^2}$

2.3.2 On note E_i la valeur approchée de E à l'instant t_i, $i \in J_n$, calculée en utilisant les valeurs approchées de $y(t_i)$ et $z(t_i)$ obtenues à la question 2.1.

2.3.2.1 $E_i = \frac{1}{2}\left(y_i^2 + \omega^2 z_i^2\right)$: la trajectoire de phase devrait être une ellipse en cas de conservation de E_i.

2.3.2.2 Le graphe fig.1 montre que le schéma d'Euler explicite, à cause des erreurs d'approximations qui s'accumulent, ne conserve pas E_i. E_i croît à chaque itération, apparemment exponentiellement.

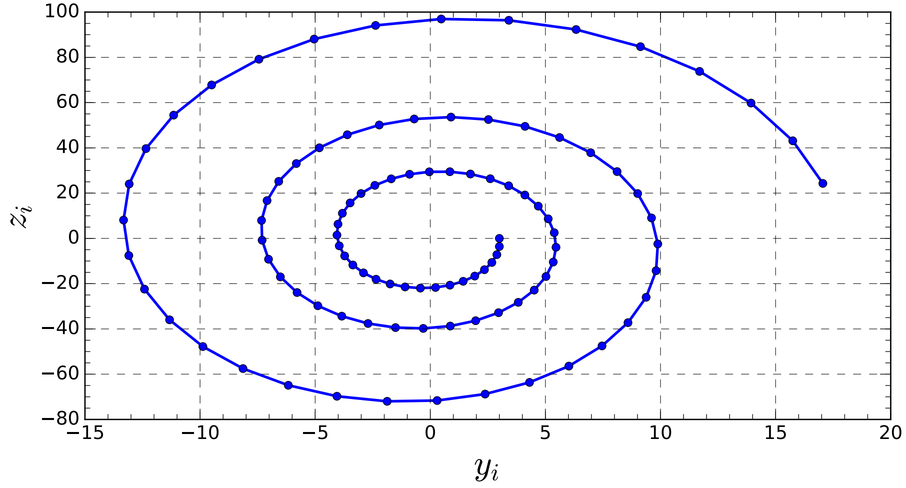

Figure 1 – Trajectoire de phase numérique obtenue avec un schéma explicite d'Euler pour $y_0 = 3$, $z_0 = 0$, $t_{min} = 0$, $t_{max} = 3, \omega = 2\pi$ et $n = 100$.

2.3.2.3 Monter que $E_{i+1} - E_i = h^2\omega^2 E_i$. Justifier alors l'allure précise du graphe 1.

$$E_i = \frac{1}{2}\left(z_i^2 + \omega^2 y_i^2\right) E_{i+1} = \frac{1}{2}\left(z_{i+1}^2 + \omega^2 y_{i+1}^2\right)$$

avec

$z_{i+1} = z_i + f(y_i)h = z_i - \omega^2 y_i h \Rightarrow z_{i+1}^2 = z_i^2 - 2\omega^2 z_i y_i h + \omega^4 y_i^2 h^2$

et

$y_{i+1} = y_i + z_i h \Rightarrow_\omega^2 y_{i+1}^2 = \omega^2 y_i^2 + 2\omega^2 y_i z_i h + \omega^2 z_i^2 h^2$

d'où :

$E_{i+1} - E_i = \frac{1}{2}\left(\omega^4 y_i^2 h^2 + \omega^2 z_i^2 h^2\right) = h^2\omega^2\left(\frac{1}{2}z_i^2 + \frac{1}{2}\omega^2 y_i^2\right) = h^2\omega^2 E_i$

Cette expression justifie la croissance exponentielle observé sur la trajectoire de phase.

3. **Schéma de Runge-Kutta d'ordre 2**

Le schéma numérique de Runge-Kutta d'ordre 2 s'écrit :

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + z_{i+1/2}h \\ z_{i+1} = z_i + f(y_{i+1/2})h \end{cases}$$

où $y_{i+1/2}$ et $z_{i+1/2}$ sont des valeurs approchées de $y(t_{i+1/2})$ et $z(t_{i+1/2})$.

3.1 Pour évaluer $z_{i+1/2}$ et $y_{i+1/2}$, on peut appliquer le schéma d'Euler sur l'intervalle $[t_i, t_{i+1/2}]$:

$$\begin{cases} y_{i+1/2} = y_i + z_i \dfrac{h}{2} \\ z_{i+1/2} = z_i + f(y_i)\dfrac{h}{2} \end{cases}$$

Ce qui donne pour les schémas numériques :

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + (z_i + f(y_i)\dfrac{h}{2})h \\ z_{i+1} = z_i + f(y_i + z_i\dfrac{h}{2})h \end{cases}$$

3.2 Fonction `rk2` intégrant l'équation différentielle.

```
def rk2(f,t_min,t_max,n,y_0,z_0):
    y=zeros(n); y[0]=y_0
    z=zeros(n); z[0]=z_0
    h=(t_max-t_min)/(n-1)
    for i in range(n-1):
       y[i+1]=y[i]+(z[i]+f(y[i])*h/2)*h
       z[i+1]=z[i]+f(y[i]+z[i]*h/2)*h
    return y,z
```

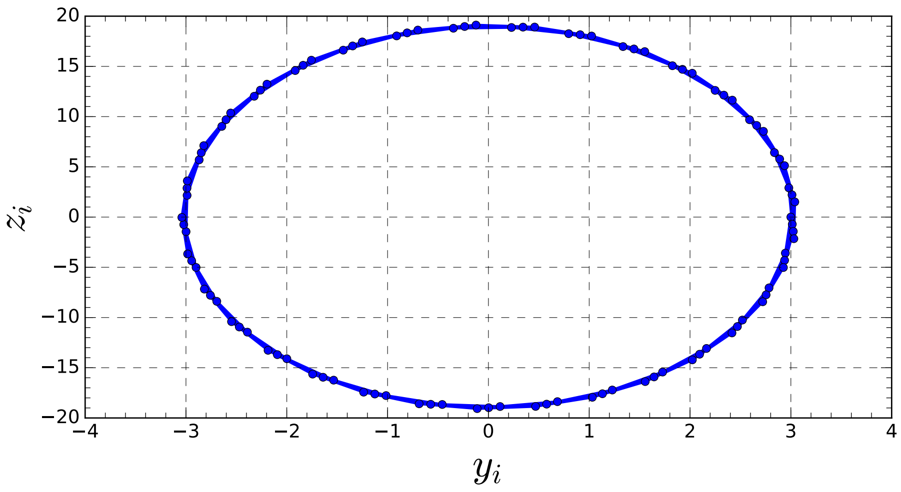

FIGURE 2 – Trajectoire de phase numérique obtenue avec un schéma explicite d'Euler pour $y_0 = 3$, $z_0 = 0$, $t_{min} = 0$, $t_{max} = 3, \omega = 2\pi$ et $n = 100$.

3.3 Trajectoire de phase de la solution approchée par la méthode RK2 : fig.2.

On constate que la trajectoire diverge à mais nettement plus lentement qu'avec la méthode d'Euler.