TP CN5 – Diffusion de pesticides dans les sols

D.Malka – MPSI 2018-2019 – Lycée Jeanne d'Albret

On s'intéresse à l'impact environnemental des pesticides. On envisage une surface agricole surmontant une couche d'argile d'épaisseur L. Sous cette couche se trouve une nappe phréatique. La concentration massique en pesticides $N(x,t)$ dans la couche d'argile satisfait l'équation de diffusion :

$$\frac{\partial N}{\partial t} - D\frac{\partial^2 N}{\partial x^2} = 0$$

avec D le coefficient de diffusion des pesticide dans l'argile.

A la profondeur $x = L$, les pesticides sont rapidement dispersés dans la nappe phréatique : $\forall\, t, \quad N(L,t) = 0$. En surface, $\forall\, t, \quad N(0,t) = N_0$.

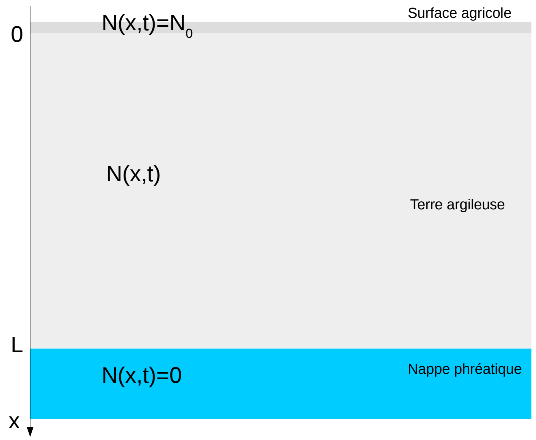

Figure 1 – Diffusion de pesticide à travers la terre argileuse

En adimensionnant l'équation avec :

$$\begin{cases} N* = N/N_0 \\ t* = t/\tau \\ x* = x/L \end{cases} \qquad \text{avec} \quad \tau = \frac{L^2}{D}$$

on obtient :

$$\frac{\partial N*}{\partial t*} - \frac{\partial^2 N*}{\partial x*^2} = 0$$

☞ *Dans la suite, on omet la notation $*$ pour alléger les expressions.*

On discrétisant l'équation différentielle à la manière de la méthode d'Euler, le champ de concentration N_i^j en $x_i = i.h$ à l'instant $t_{j+1} = (j+1).k$ vérifie :

$$A.N_i^{j+1} = B.N_i^j$$

avec k le pas de temps, h le pas d'espace, N vecteur-colonne de dimension $(n,1)$ tel que $n.h = 1$:

$$N = \begin{pmatrix} N_0 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ N_i \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ N_{n-1} \end{pmatrix}$$

et avec A et B les matrices de diffusion de dimension (n, n), en posant $a = \dfrac{k}{2h^2}$:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ a & 1-2a & a & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & a & 1-2a & a & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & a & 1-2a & a & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & a & 1-2a & a \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ -a & 1+2a & -a & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -a & 1+2a & -a & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & -a & 1+2a & -a & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & -a & 1+2a & -a \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Les conditions aux limites fixes les valeurs de $N[0] = 1$ (surface agricole) et $N[n-1] = 0$ (nappe phréatique).

Au cours de ce TP en forme de mini-projet, vous cherchez à répondre aux questions suivantes :

1. Déterminer la concentration massique $N(x, t)$ en pesticides dans la couche d'argile à un instant quelconque.
2. Déterminer au bout de combien de temps la concentration à $2\,\mathrm{m}$ de profondeur est notable ($\sim N_0/10$).
3. Évaluer le flux de pesticide prévu par ce modèle en régime établi.

Vous observerez et évaluerez l'influence des valeurs de h et k sur la précision et le temps de calcul (sans aborder les problèmes de stabilité numérique).

Vous travaillerez avec les paramètres suivant :
- concentration massique sur la surface agricole : $N_0 = 5\,\mathrm{g \cdot L^{-1}}$, supposée stationnaire,
- concentration nulle à $t = 0$, $\forall\, x \neq 0$,
- coefficient de diffusion des pesticides $D = 0{,}2\,\mathrm{cm^2 \cdot min^{-1}}$,
- profondeur de la nappe phréatique : $L = 10\,\mathrm{m}$.

Quelques pistes :
- Écrire deux fonctions qui renvoie les matrices de diffusion A et B.
- Écrire une fonction de complexité linéaire calculant $Y = BN$.
- Résoudre le système d'équations algébrique $AN = BN$ à chaque instant en appelant la fonction `solve` du module `numpy.linalg`.
- Écrire éventuellement des fonctions dédiées à la réponse des questions posées dans le sujet.